Istituzioni di Algebra Superiore, 2023-2024

Pagina web del corso:
www.mat.uniroma1.it/people/pezzini/didattica/IALS2324/IstAlSup2324.html

Email: pezzini@mat.uniroma1.it
Ufficio: Dip. Mat., stanza n. 11 (piano terra)

Altre informazioni:

1. Ricevim. studenti: DA FISSARE, sarà online
2. Esame: scritto + orale
3. Fogli settimanali di esercizi
4. Libri: Hall per Gruppi di Lie, Humphreys per alg. di Lie.
   NON E' ASSOLUT. NEC. COMPRARLI.
   Del libro di Hall faremo poco, dell'Humphreys circa 2/3.

5. Diario delle lezioni, giornaliero sul sito.
6. Corsi vecchi: /people/pezzini/teaching.html
   att.: alcune cose sono diverse.

Prerequisiti: 1. Algebra lineare molto bene.

Durante il corso useremo talvolta argomenti di algebra lineare forse non visti prima: faremo delle parentesi per vederli bene qui.

2. Topologia:
- concetti base (aperti, chiusi, topologia di sottospazio, connessione, componenti connesse, topologia prodotto)
- topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$
- varietà differenziabili immerse in $\mathbb{R}^n$ (solo la def.)

3. Analisi in più variabili (pochissimo: funzioni C^∞ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, serie di potenze).

INTRODUZIONE

Gruppi di Lie: struttura di gruppo + str. di var. differenziabile (reale o compl.) + compatibilità (= moltipl. $G\times G \to G$ e inversa $G \to G$ sono C^∞)

Algebre di Lie: spazio vettoriale L con „operazione" $L \times L \to L$ bilineare non necess. associativa + assiomi

I gruppi di Lie emergono naturalmente, come gruppi molto noti di matrici, oppure gruppi di „simmetrie" di var. differenziabili.

ES.: 1) $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$, $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \times)$, $(S^1$, „somma degli angoli"$) =$

$= (S^1 \subseteq \mathbb{C}, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \times)$

2) $(F = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C})$ $\quad$ (I_n = matrice identità)

$GL(n, F)$, $SL(n,F) = \{A \in GL(n,F) \mid \det(A) = 1\}$

$O(n,F) = \{A \in GL(n,F) \mid A \cdot {}^tA = I_n\}$

$Sp(n,F) = \{A \in GL(n,F) \mid A J_n {}^tA = J_n\}$ (n pari)

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & -1 & & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

O ed Sp emergono naturalmente come i sgr di $GL(n,F)$ che preservano le forme bil. non deg. di matrici I_n e J_n (su $\mathbb{R}$ quella di I_n è il prod. scalare standard).

Oss.: Sono oggetti interessanti in sé, e utili in geometria se emergono come gruppi di simmetrie di var. diff., perché la geom. del gruppo influenza la geom. della varietà.

Algebre di Lie: Sono emerse storicam. come spazio tangente all'elem. neutro e_G di un gruppo di Lie. L'operazione, chiamata bracket (di Lie), deriva dall'operaz. di gruppo.

Successivam. sono state applicate in molti ambiti, anche senza che i gruppi fossero coinvolti, ad es. in geom. algebrica (teoria delle def.), topologia (teoria dei nodi), e soprattutto fisica matematica (spesso qui hanno dim. infinita!)

Es.: Consid. $G = GL(n, F)$, è un aperto di

$$M_n(F) = \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \\ M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2n^2} \end{cases},$$

il suo sp. tangente in $I_n = e_G$ è semplicem. $M_n(F)$. Il bracket è

$$M_n(F) \times M_n(F) \longrightarrow M_n(F)$$

$$(A, B) \longmapsto [A, B] = AB - BA$$

Con quest'operazione, $M_n(F)$ si denota con $\mathfrak{gl}(n, F)$.

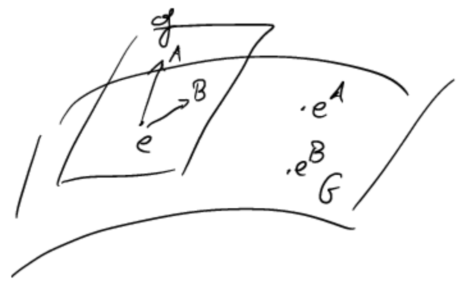
In questo caso non è <u>né commutativa</u>, <u>né associativa</u> (!)

Gruppo e algebra sono strettamente legati, tramite la <u>mappa esponenziale</u>.

Infatti dato $G \subseteq GL(n,F)$ e $\mathfrak{g} = T_e G$, possiamo esponenziare tutte le matrici di $\mathfrak{g}$ e otteniamo elem. di G (non è ovvio!). Inoltre, $A \mapsto e^A$ è un diffeom. fra un intorno U di $0 \in \mathfrak{g}$ e un int. V di $I_n \in G$ (ancor meno ovvio!).

Infine, l'operaz. di G "in V" è <u>determinata</u> dal bracket "in U": (sempre meno ovvio....).

date $A, B \in U \subseteq \mathfrak{g}$



$$e^A \cdot e^B = e^{\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[A,B]]+\dots\right)}$$

Questo funziona solo vicino a $0 \in \mathfrak{g}$ e vicino a $I_n \in G$, ma è utilissimo perché proprietà algebriche di $\mathfrak{g}$ inducono proprietà alg. di G, e in questo modo molti problemi su G si risolvono traducendoli in problemi su $\mathfrak{g}$, cioè si <u>linearizzano</u>! Att: si è tentati di pensare che il bracket su $\mathfrak{g}$ sia un po' come un'approssimaz. al prim'ordine del prodotto di G, ma non è proprio così: la formula col bracket descrive <u>esattam.</u> l'op. di G, almeno vicino a e_G!

<u>Attenzione:</u> Nel corso <u>non</u> considereremo gr. di Lie <u>qualsiasi</u> (verrebbe troppa geom. differenziale...)

Considereremo solo gruppi di Lie <u>di matrici</u>, cioè sottogruppi/sottovarietà di $GL(n, \mathbb{F})$.

E' una classe importante di gruppi di Lie, e ha il vantaggio che alcune cose si semplificano. Non tutti i gruppi di Lie sono gr. di Lie di matrici, ad es.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{non lo è}$$

$$\text{cioè } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}) \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

è un gruppo di Lie (si può dimostrare) ma non è isomorfo ad alcun gruppo di Lie di matrici.

Obiettivi del corso (risultati principali)

1) Un qualsiasi sottogruppo chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$ è anche una varietà differenziabile
(condizione algebrica + condizione topologica $\Longrightarrow$ proprietà C^∞)

2) Tutte le rappresentazioni (continue, di dim. finita) di un qualsiasi sottogruppo chiuso compatto di $GL(n,\mathbb{R})$ sono completamente riducibili
(condizione topologica $\Longrightarrow$ proprietà algebrica)

3) Classificazione delle algebre di Lie semisemplici su $\mathbb{C}$
(algebra $\rightsquigarrow$ combinatoria $\rightsquigarrow$ algebra)

PARTE PRIMA: GRUPPI DI LIE (DI MATRICI)

DEFINIZIONI E PRIME OSSERVAZIONI

Def.: Un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico, e tale che l'operaz. di gruppo $\begin{array}{c} G\times G \to G \\ (g,h)\mapsto gh \end{array}$ e l'inverso $\begin{array}{c} G \to G \\ g\mapsto g^{-1} \end{array}$ sono funzioni continue.

Esempi: 1. Gli esempi visti prima sono chiaramente tutti gruppi topologici.
2. $(\mathbb{Q},+)$ con top. euclidea è un gruppo topologico ma non una var. diff.

Oss.: Sia $g\in G$. Allora sono definite la traslazione a sinistra e a destra per g:

$$L_g : \begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gx \end{array}, \qquad R_g : \begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto xg \end{array}$$

Es.: 1) $G=(\mathbb{R},+)$, $L_g : \begin{array}{c} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 1+x \end{array}$ con $g=1$ $\quad R_g : \begin{array}{c} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x+1 \end{array}$

(qui $L_g = R_g$)

2) $G = GL(2,\mathbb{R})$ $\qquad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$L_g : \begin{array}{c} GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \end{array}$$

L_g = scambiare le righe

$$R_g : GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$ cioè R_g = scambiare le colonne, e oss. qui $R_g \neq L_g$

<u>Oss.</u>: ancora su L_g, R_g.

Sono applicazioni continue, vediamo la dim. per L_g. Definiamo

$$\tilde{m} = m\Big|_{\{g\}\times G} : \{g\} \times G \longrightarrow G \qquad \text{è continua}$$
$$(g,x) \longmapsto gx$$

inoltre $\{g\} \times G$ è omeomorfo a G tramite la proiezione

$\{g\} \times G \longrightarrow G$, che ha inversa $G \xrightarrow{\psi} \{g\}\times G$

$(g,x) \longmapsto x$ $\qquad$ $x \longmapsto (g,x)$

e abb.
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend left, "L_g"] & \{g\}\times G \arrow[r, "\tilde{m}"] & G \end{tikzcd}$$
$$x \longmapsto (g,x) \longmapsto gx$$
cioè $L_g = \tilde{m} \circ \psi$

quindi L_g è continua. Analogo ragionam. con R_g.

Inoltre L_g e R_g sono omeom., perché hanno inverse

$L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$, $\quad R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}$, infatti

$$G \xrightarrow{L_g} G \xrightarrow{L_{g^{-1}}} G \qquad \text{cioè } L_{g^{-1}} \circ L_g = Id_G$$
$$x \longmapsto gx \longmapsto g^{-1}(gx) = x$$

e le altre verifiche sono analoghe.
Segue che il coniugio per g, $\gamma_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ è un omeomorfismo, perché $\gamma_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$

<u>Oss.</u>: Se G è un gruppo topologico e H è un sgr, allora possiamo mettere su H la top. di sottospazio, e H con essa è un gruppo topologico (esercizio).

<u>Def.</u>: Sia G un gruppo topologico, e $H \subseteq G$ un sgr <u>chiuso</u>. Allora H si dice anche <u>sottogruppo topologico</u>. Nel corso però diremo di solito semplicemente <u>sottogruppo chiuso</u>.

<u>Es.</u>: I gruppi di matrici visti prima sono sgr chiusi di $GL(n, F)$, perché sono dati da equazioni che def. chiusi, ad es. SL è dato dall'eq. $\det(A) = 1$.

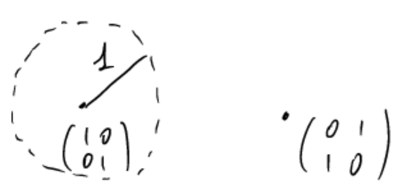
Può essere anche che un sgr di G sia <u>aperto</u>.

<u>Esempi</u>: 1) Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un gruppo <u>finito</u>, ad es.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL(2, \mathbb{R}).$$

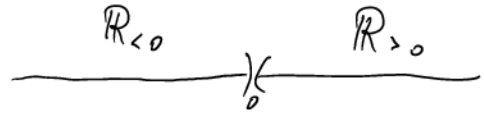
Allora la topologia su G è <u>discreta</u> (= i punti sono s.in. aperti);

e $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è aperto in G



distanza $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

2) $G = \mathbb{R}_{\neq 0}$



(con la moltiplicaz. usuale)

$$G = \underbrace{\mathbb{R}_{>0}}_{\shortparallel} \cup \mathbb{R}_{<0}$$

H = sottogruppo aperto e chiuso! Infatti

$$H = \underbrace{G \cap \,]0,+\infty[}_{\Rightarrow\ H \text{ aperto in } G} = \underbrace{G \cap [0,+\infty[}_{\Rightarrow\ H \text{ chiuso in } G}$$

<u>Prop.</u>: Sia H un sgr di un gr. top. G. Se H è aperto, allora è anche chiuso.

<u>Dim.</u>: $G = \bigcup_{gH \in G/H} gH$ (unione disgiunta delle classi lat. sinistre, ricordiamo $gH \cap g'H = \begin{cases} gH \\ \emptyset \end{cases}$ opp.)

Ora $gH = L_g(H)$, quindi gH è aperta $\forall g$.

Poi $G \setminus H$ è l'unione delle cl. lat. sin. diverse da H, quindi $G \setminus H$ è aperto, e H è chiuso. $\square$

<u>Prop.</u>: Sia G gr. topol., e G° la componente connessa contenente l'elem. neutro $e \in G$. Allora G° è un sgr <u>normale</u> chiuso di G.

<u>Dim.</u>: Le comp. connesse sono sempre chiuse. Verif che G° è un sgr.

Se $h \in G^0$ allora $h \cdot G = L_h(G^0)$ è una comp. connessa di G, e interseca G^0 perché $h \cdot G^0 \ni h \cdot e = h$, quindi $G^0 \cap hG^0 \ni h$. Segue $G^0 = hG^0$, cioè il prodotto di elem. di G^0 sta in G^0. Segue anche che $e \in hG^0$, cioè c'è un elem. $k \in G^0$ tale che $e = hk$. Ma allora k è h^{-1}, cioè $h^{-1} \in G^0$ $\forall h \in G^0$. Allora G^0 è un sgr. Sia ora $g \in G$ e consid. gG^0g^{-1}, è uguale a $L_g(R_{g^{-1}}(G^0)) = \gamma_g(G^0)$, e sappiamo che γ_g è un omeom., quindi $\gamma_g(G^0)$ è una comp. connessa. Inoltre $\gamma_g(G^0) \ni e$, perciò $\gamma_g(G^0)$ interseca G^0, e allora $\gamma_g(G^0) = G^0$.

Segue: G^0 è normale. $\square$

Def.: Un omomorfismo di gruppi topologici $f: G \to G'$ è un om. di gruppi che è anche continuo. Un isom. di gr. topol. è un isom. di gruppi che è un omeomorfismo (questo è equivalente a dire che f è omom. di gruppi top. biiettivo, e f^{-1} è anch'essa omom. di gruppi topologici).

Anche qui, nel corso useremo spesso semplicem. la terminologia omomorfismo continuo.

Es.: 1) $G = (\mathbb{R}, +)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ $\quad$ è un omomorfismo continuo
$\left(f(x+y) = -x-y = f(x) + f(y) \right)$

(att.: in generale $\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$ <u>non</u> è un omomorfismo! lo è se e solo se G è abeliano)

2) $G = (\mathbb{R}, +)$

Scegliamo una base $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ di $\mathbb{R}$ come sp. vett. su $\mathbb{Q}$, cioè ogni reale x si scrive come comb. lin. dei b_i a coeff. in $\mathbb{Q}$:

$$x = \alpha_1 b_{i_1} + \dots + \alpha_n b_{i_n} \qquad (n, i_1, .., i_n \text{ dipendono tutti da } x)$$

Definiamo $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha_1 + \dots + \alpha_n \end{aligned}$ Allora $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Q}$ quindi

f non è continua, ma f è un omomorfismo (= è additiva).

(<u>Curiosità</u>: ogni applicazione additiva e non continua $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha il grafico <u>denso</u> in $\mathbb{R}^2$!).

3) $G = GL(n, \mathbb{R})$ $f(A) = {}^tA^{-1}$ è un <u>isomorfismo</u> di gruppi topologici.

MAPPA ESPONENZIALE

Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^{n^2}$ si scrive facilmente in termini di matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

come vettori sarebbero $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$.

Il prod. scalare è $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots + a_{n1}b_{n1} + \ldots + a_{nn}b_{nn}$,

ed è anche uguale a $tr(A \cdot {}^tB)$. Infatti

$$A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{jk}}_{\text{in } A\cdot B \text{ sarebbe } b_{kj}}$$

$$tr(A \cdot {}^tB) = c_{11} + \ldots + c_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{1k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{2k} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{nk}$$

che è proprio il prodotto scalare. Lo stesso ragionam. vale con $M_n(\mathbb{C})$, usando $tr(A\,{}^t\bar{A})$. Proseguiamo su $\mathbb{C}$, i ragionam. valgono anche su $\mathbb{R}$.

La norma corrispondente $\|A\| = \sqrt{tr(A \cdot {}^t\bar{A})}$ (è quella solita in $\mathbb{C}^{n^2}$) soddisfa

1) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\quad \|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ $\quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall c \in \mathbb{R}$

2) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

3) $\|\underset{\text{prod. fra matrici}}{A \cdot B}\| \leq \|A\| \underset{\text{prod. in } \mathbb{R}}{\cdot} \|B\|$

E' da verificare 3), e per questo osserviamo che

$$\|A \cdot B\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\text{elt. } (i,j) \text{ di } A\cdot B|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \underset{\text{dis. triangolare in } \mathbb{C}^n}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{ik} b_{kj}| \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \right)^2 \underset{\text{Cauchy - Schwarz in } \mathbb{R}^{2m}}{\leq} \sum_{i,j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} |b_{kj}|^2 \right) =$$

$$= \underbrace{\left(|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 \ldots \right)}_{i=1} \underbrace{\left(|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + \ldots \right)}_{j=1} + \underbrace{\left(|a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 + \ldots \right)}_{i=2} \underbrace{\left(|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + \ldots \right)}_{j=1} + \ldots$$

raccolgo quelle con lo stesso j

$$= \left(\sum_{i,k=1}^{m} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{m} |b_{\underset{j=1}{k1}}|^2 \right) + \left(\quad \right) \left(\sum_{k=1}^{m} |b_{k\underset{j=2}{2}}|^2 \right) + \ldots =$$

$$= \left(\sum_{i,k=1}^{m} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k,j=1}^{m} |b_{kj}|^2 \right) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2$$ quindi 3) è verificata.

Definiamo ora funzioni di matrici a valori matrici, usando serie convergenti.

Lemma

Sia $a : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$, $m \mapsto a_m$ una successione tale che $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| r^m < +\infty$ per un $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Allora $f(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m$ è una matrice ben def. $\forall X \in B(0, r)$ = palla ap. di raggio r e centro $0 \in M_n(\mathbb{C})$, e definisce una funzione continua $B(0,r) \to M_n(\mathbb{C})$

Dim.: Dimostriamo che la succ. delle somme parziali è di Cauchy: dati $\ell > k$ abb.

$$\left\| \sum_{m=0}^{\ell} a_m X^m - \sum_{m=0}^{k} a_m X^m \right\| = \left\| \sum_{m=k+1}^{\ell} a_m X^m \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{m=k+1}^{\ell} |a_m| \cdot \|X^m\| \leq \sum_{m=k+1}^{\ell} |a_m| \cdot \|X\|^m \leq \underbrace{\sum_{m=k+1}^{\ell} |a_m| \cdot r^m}_{\text{distanza fra due termini della succ. convergente}}$$

$$N \longmapsto \sum_{m=0}^{N} |a_m| r^m$$

Quindi $f(X)$ è ben definita, e la serie converge uniformemente risp. a X, per cui f è continua. $\square$

Definizione: Definiamo l'esponenziale e il logaritmo di matrici:

$$e^X = \exp(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} X^m,$$

$$\log(I_n + X) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} X^m,$$

L'esp. converge (nel senso del lemma) per tutte le $X \in M_n(\mathbb{C})$ e log converge (nel senso del lemma) se $\|X\| < 1$, quindi questo definisce applicazioni continue

$$\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}),$$

$$\log : B(I_n, 1) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}).$$

Oss.: 1) Se $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ commutano $(XY = YX)$ allora

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$$

e si ottiene la solita formula $e^X e^Y = e^{X+Y}$.

Attenzione: se $XY \neq YX$ può verificarsi $\boxed{e^{X+Y} \neq e^X e^Y \ !!}$

ad es. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, verifica per esercizio.

2) Dato che X e $-X$ commutano, allora $e^X e^{-X} = e^{X-X} = e^0 = I_n$

cioè e^X è una matrice invertibile, con inversa e^{-X}. Allora

in realtà l'immagine di exp è cont. in $GL(n, \mathbb{C})$, e scriviamo

anche $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$.

3) Se $C \in GL(n, \mathbb{C})$ allora $C e^X C^{-1} = e^{CXC^{-1}}$, basta

osservare che $$C\left(\sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} X^m\right) C^{-1} = \sum_{m=0}^{m} \frac{1}{m!} (CXC^{-1})^m.$$

Obiettivo: dimostrare che $e^{\log(X)} = X$ e $\log(e^X) = X$ (sotto certe

ipotesi!).

Serve prima una parentesi di algebra lineare.

Parentesi di algebra lineare

Prop.: Le matrici diagonalizzabili $n \times n$ sono dense in $M_n(\mathbb{C})$, cioè data $A \in M_n(\mathbb{C})$ qualsiasi, esiste una succ. di matrici diagonalizzabili che converge ad A.

Per la dim.:

<u>Lemma:</u> Ogni matrice in $M_n(\mathbb{C})$ è simile ad una matrice triangolare superiore.

<u>Dim. lemma:</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Il suo pol. caratteristico ha radici (siamo su $\mathbb{C}$), quindi A ha almeno un autovettore $v_1 \in \mathbb{C}^n$.

Completiamo v_1 ad una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{C}^n$, e consid. l'appl. lineare $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ che ha A come matrice canonica. Nella base $\mathcal{B}$, l'applicazione f ha matrice

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad \text{cioè } A \text{ è simile a } C.$$

$(\lambda_1 = \text{autovalore di } v_1)$

A'

Cancellando la prima riga e la prima colonna di C otteniamo $C' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, che per induzione è simile ad una matrice triang. sup.:

$$\begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} = \underset{\substack{\cap \\ GL(n-1,\mathbb{C})}}{M} \cdot C' \cdot M^{-1}. \quad \text{Segue:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

cioè C è simile ad una matr. triang. sup.. $\square$

<u>Dim. prop.</u>: Sia $C = MAM^{-1}$ con C triang. sup. e $M \in GL(n, \mathbb{C})$.

Allora
$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autoval. di C (e di A).

Se sono tutti distinti, C ed A sono diagonalizzabili. Altrimenti costruiamo una sequenza di matrici $C^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} C$ con $C^{(k)}$ uguale a C tranne che sulla diagonale:
$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{(k)} \end{pmatrix}$$
e i numeri sulla diagonale tali che $\lambda_i^{(k)} \neq \lambda_j^{(k)}$ $\forall i \neq j$, e $\lambda_i^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_i$

es: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} & 1 \\ 0 & 1 + \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$

Poniamo $A^{(k)} = M^{-1} C^{(k)} M$. Abb.: $C^{(k)} \to C$, quindi $A^{(k)} \to M^{-1} C M = A$, inoltre $C^{(k)}$ è diagonalizz. $\forall k$ e allora anche $A^{(k)}$. $\square$

<u>Fine parentesi di algebra lineare</u>

Oss: 1) Se A è diagonalizzabile, mettiamo $A = C D C^{-1}$
con $C \in GL(n)$ e $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, allora calcolare

e^A è semplice, basta osservare che

$$e^A = e^{CDC^{-1}} = C e^D C^{-1} = C \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} C^{-1} =$$

$$= C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} C^{-1}$$

2) Se A è nilpotente ($A^k = 0$ per k abbastanza grande)
allora e^A è una somma finita.

3) Vedremo in seguito come usare queste due cose per calcolare praticamente e^A ($\forall A$).

Teorema: 1) Per ogni $g \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $\|g - I_n\| < 1$ vale

$$e^{\log(g)} = g$$

(oss.: $\log(g) = \log(I_n + \underset{g - I_n}{\underset{\parallel}{X}})$ è ben def.)

2) Per ogni $X \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $\|X\| < \log 2$ vale
$\|e^X - I_n\| < 1$, e

$$\log(e^X) = X$$

Per la dimostrazione:

Lemma: Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di $A \in M_n(\mathbb{C})$, allora $|\lambda| \leq \|A\|$.

Dim.: Sia v autovettore, e $B = \begin{pmatrix} v & \cdots & v \end{pmatrix}$,

allora $A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda v & \cdots & \lambda v \end{pmatrix}$

$$\|A \cdot B\|^2 = n \cdot |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2$$

$$\|B\|^2 = n \|v\|^2$$

e la disuguaglianza voluta segue da $\|A \cdot B\|^2 \leq \|B\|^2 \cdot \|A\|^2$, cioè

$$\cancel{n} \cdot |\lambda|^2 \cdot \cancel{\|v\|^2} \leq \cancel{n} \cancel{\|v\|^2} \cdot \|A\|^2 . \qquad \square$$

Dimostrazione del teorema

1) Supponiamo prima di tutto che g sia diagonalizzabile:

$$g = CDC^{-1} \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_i = \text{autovalori di } g).$$

Allora $\lambda_i - 1$ sono gli autovalori di $X = g - I_n$. Dal fatto che $\|X\| < 1$ segue $|\lambda_i| < 1$ dal lemma precedente.

Allora

$$\log(g) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} X^m = C \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (\lambda_1 - 1)^m & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (\lambda_n - 1)^m \end{pmatrix} C^{-1} =$$

$$= C \begin{pmatrix} \log(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \log(\lambda_n) \end{pmatrix} C^{-1}$$

e allora

$$e^{\log(g)} = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1} = g$$

Se invece g non è diagonalizzabile, allora usiamo la densità delle matrici diagonalizzabili e la continuità di log ed exp.

2) Sia X con $\|X\| < \log(2)$, allora

$$\|e^X - I_n\| = \left\| \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} X^m \right\| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \|X\|^m = e^{\|X\|} - 1 < 1,$$

Quindi $\log(e^X)$ è definito.

La dim. dell'uguaglianza è analoga a quella di 1). $\square$

L'esponenziale su $M_n(\mathbb{R})$

Chiaramente exp e log sono definiti su $M_n(\mathbb{R})$ come restrizioni delle funzioni già viste su $M_n(\mathbb{C})$.

<u>Proposizione</u>: Le componenti di $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, viste come funzioni $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, sono serie di potenze nelle entrate della matrice, con dominio di convergenza $M_n(\mathbb{R})$, in particolare sono C^∞.

 <u>Dim.</u>: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'entrata $(A^m)_{ij}$ di A^m è un

polinomio omogeneo di grado m nelle entrate di A (dim.: esercizio)

quindi la scrittura
$$\underbrace{\exp(A)_{ij}}_{\substack{\text{entrata}\\ \text{riga } i \text{ colonna } j}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}(A^m)_{ij}$$
è già un'espressione

dell'entrata $\exp(A)_{ij}$ come serie di potenze in più variabili (= le entrate di A). Abbiamo già dimostrato che la serie converge $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$; inoltre per risultati standard di analisi $\exp(A)_{ij}$ è C^∞, e le derivate parziali si calcolano differenziando gli addendi della serie. $\square$

Sottogruppi a un parametro

<u>Lemma</u>: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, consid. la funzione
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$
E' una funzione C^∞, e vale
$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0} = A$$

<u>Dim.</u>: Le entrate di e^{tA} nella variabile t sono serie di potenze con raggio di convergenza infinito, quindi basta derivare termine a termine. $\square$

<u>Lemma</u>: Il differenziale in $0 \in M_n(\mathbb{R})$ di $\exp$ è l'identità, cioè la matrice Jacobiana calcolata in 0 è la matrice identità.

<u>Dim.</u>: Consid. $\exp: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, il diff. di $\exp$ in 0 è l'appl. lineare che approssima $\exp$ al prim'ordine vicino a 0. Visto che
$$\exp(A) = I_n + \underbrace{A} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$
allora il diff. in 0 è $A \mapsto A$, cioè l'identità $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ $\square$

Oss.: La funzione e^{tA} è anche un omomorfismo di gruppi $\mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ perché tA e sA commutano, per cui

$$e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA} e^{sA}.$$

Si chiama anche il sottogruppo a un parametro generato da (o associato ad) A.

Teorema: Sia $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ omomorfismo continuo.

Allora esiste unica $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\varphi(t) = e^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dim.: L'unicità è chiara dal lemma precedente, dim. che A esiste.

L'idea è quella di prendere $A = \log(\varphi(1))$, ma c'è il problema che $\varphi(1)$ potrebbe essere troppo lontano da I_n per poter fare il log.

(Idea alternativa: si può ricostruire a posteriori A come $\frac{d}{dt} \varphi(tA)\Big|_{t=0}$, ma nessuno ci assicura che $\varphi(tA)$ sia derivabile!)

Osserviamo il fatto seguente: φ può venire "riscalata a piacere" con un coeff. $\varepsilon > 0$, cioè ponendo

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$$
$$t \mapsto \varphi(\varepsilon t)$$

abb. che anche φ_ε è un omomorfismo continuo, e $\varphi(t) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ $\forall t$.

D'altronde, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varphi_\varepsilon(]-2, 2[) \subseteq \exp(B(0,r))$

con $r = \frac{\log(2)}{2}$, perché dal teorema prec. exp è biiettiva da $B(0,r)$ alla sua immagine $\exp(B(0,r))$ (con inversa $= \log$) e questi insiemi sono entrambi aperti.

Sia allora $X = \log(\varphi_\varepsilon(1))$ $(\|X\| < r)$ e prendiamo anche $Z = \log\left(\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ $(\|Z\| < r)$. Segue

$$\varphi_\varepsilon(1) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = e^Z \cdot e^Z = e^{2Z}$$

cioè $e^{2Z} = e^X$, e visto che $\|2Z\| < \log(2)$ (qui si usa la scelta $r = \frac{\log(2)}{2}$) allora $2Z = \log(e^{2Z}) = \log(e^X) = X$.

Concludiamo che $\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}X}$.

Ripetiamo lo stesso ragionam. con $\frac{1}{4}X$ e $\frac{1}{2}X$ al posto di $\frac{1}{2}X$ e X, ecc..., ottenendo

$$\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2^k}\right) = e^{\frac{1}{2^k}X} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Sia ora $a \in [0, 1[$ e consid. la sua scrittura in base 2:

$$a = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \dots + \frac{1}{2^k}a_k + \dots$$

con $a_i \in \{0,1\}$ $\forall i$.

Abb.:

$$\varphi_\varepsilon(a) = \varphi_\varepsilon\left(\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \ldots + \frac{1}{2^k}a_k\right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \varphi_\varepsilon(\text{—}) = \lim_k \varphi_\varepsilon\left(\tfrac{1}{2}\right)^{a_1} \varphi_\varepsilon\left(\tfrac{1}{4}\right)^{a_2} \cdots \varphi_\varepsilon\left(\tfrac{1}{2^k}\right)^{a_k} =$$

$$= \lim_k \left(e^{\frac{1}{2}X}\right)^{a_1} \cdots \left(e^{\frac{1}{2^k}X}\right)^{a_k} = \lim_k e^{\left(\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_k}{2^k}\right)X} = e^{\lim_k\left(\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_k}{2^k}\right)X} =$$

$$= e^{aX}.$$

Inoltre $\varphi_\varepsilon(-a) = \varphi_\varepsilon(a)^{-1} = \left(e^{aX}\right)^{-1} = e^{-aX}$. Infine, dato $a \in \mathbb{R}$ scelgo $k \in \mathbb{Z}$ con $k > |a|$ e scriviamo

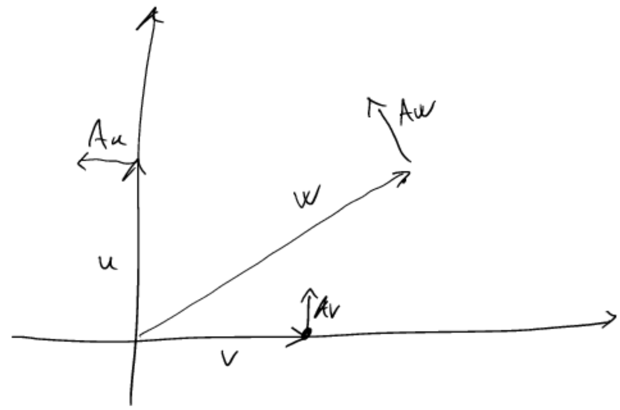
$$\varphi_\varepsilon(a) = \varphi_\varepsilon(a/k)^k = \left(e^{\frac{a}{k}X}\right)^k = e^{aX}$$

Quindi φ_ε è il sgr a un parametro ass. ad X. Basta porre allora $A = \frac{1}{\varepsilon}X$ e abb. $\varphi(t) = \varphi_\varepsilon(t/\varepsilon) = e^{\frac{t}{\varepsilon}X} = e^{tA}$. $\square$

<u>Esempio:</u> $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

diagonalizzabile in $M_2(\mathbb{C})$

Spiegazione intuitiva: $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ può essere interpretato come un <u>campo vettoriale</u>

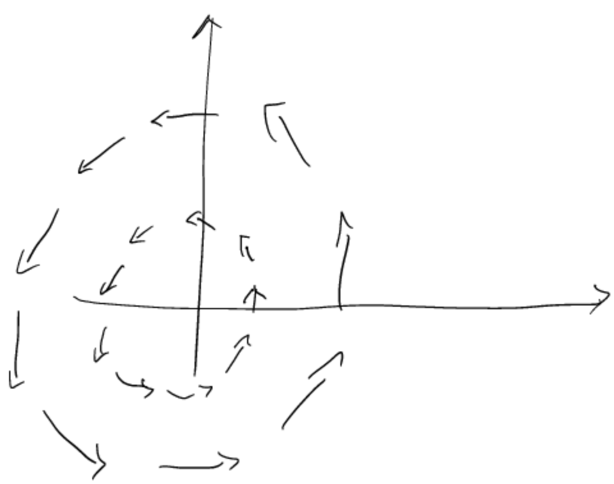


che nel punto $v \in \mathbb{R}^2$ dà il vettore Av, immaginato „applicato" al punto v.

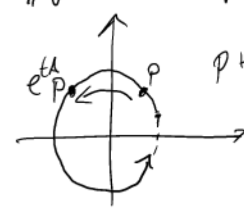
Questo corrisponde all'omom. continuo

$$\mathbb{R} \to GL(2, \mathbb{R})$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = e^{tA}$$



che possiamo interpretare come un „flusso" sul piano



$p \mapsto e^{tA}p$

Se lo deriviamo in $t=0$ otteniamo proprio A.

<u>Esempio</u>: Sia $\varphi: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo a un parametro.

L'immagine è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$, ma <u>non è detto</u> che sia un sottogruppo chiuso!

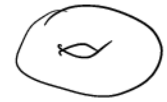
Consid. ad esempio $v \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e

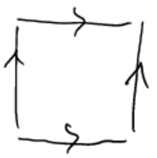
$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow GL(4, \mathbb{R})$$

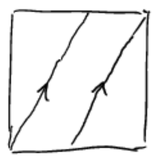
$$t \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(at) & -\sin(at) & 0 & 0 \\ \sin(at) & \cos(at) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos(bt) & -\sin(bt) \\ 0 & 0 & \sin(bt) & \cos(bt) \end{array}\right)$$

Se $v \in \mathbb{Q}^2$ (opp. se $b \neq 0$ e $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) allora $\mathrm{Im}(\varphi)$ è un sottogruppo chiuso. Ma se $b \neq 0$ e $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, allora $\mathrm{Im}(\varphi)$ <u>non è</u>

chiuso.

Verifica: osserviamo che $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \left(\begin{array}{c|c} SO(2,\mathbb{R}) & 0 \\ \hline 0 & SO(2,\mathbb{R}) \end{array}\right) = H$ che è un sgr chiuso di $GL(4,\mathbb{R})$. Inoltre $H \cong S^1 \times S^1$ = toro 

=  , e $\mathrm{Im}(\varphi)$ è una retta che si „avvolge" sul toro:

Se il coeff. angolare è irrazionale, $\mathrm{Im}(\varphi)$ è densa nel toro, „non si richiude mai su se stessa".

Prossimo obiettivo: definire l'algebra di Lie di un sottogruppo chiuso $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$. Servirà a dim. che G è una sottovarietà.

Algebre di Lie: definizioni

In questa sezione k è un campo qualsiasi.

Def.: Sia L uno sp. vett. su k, e

$$\begin{aligned} L \times L &\longrightarrow L \\ (x,y) &\longmapsto [x,y] \end{aligned}$$

un'applicaz. chiamata bracket. Allora L si dice algebra di Lie se

1) il bracket è bilineare,

2) vale $[x,x]=0 \quad \forall x \in L$

3) vale l'identità di Jacobi:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \quad \forall x,y,z \in L.$$

Oss.: Dati $x,y \in L$ abb. $0=[x+y,x+y]=\cancel{[x,x]}+[x,y]+[y,x]+\cancel{[y,y]}$

da cui $[x,y]=-[y,x]$

Esercizio. Viceversa, se char $k \neq 2$ e $[x,y]=-[y,x] \ \forall x,y \in L$

allora $[x,x]=0 \quad \forall x \in L$.

Oss.: Ricordiamo la seguente terminologia generale:

Un'algebra è uno sp. vettoriale A dotato di un'appl. bilineare $A \times A \to A$.

Un'algebra A si dice associativa se l'appl. bilineare data è associativa (nel senso usuale), e in tal caso si chiama prodotto, perché con la somma in A (come sp. vett.) rende A un anello (La distributività segue dalla bilinearità.)

Es.: $M_n(k)$ è un'algebra associativa, prendendo il prodotto usuale di matrici.

Torniamo alle algebre di Lie.

Esempi: 1) Sia L sp. vett. qualsiasi, e poniamo $[x,y]=0 \ \forall x,y \in L$.

Questa L è un'alg. di Lie, si chiama abeliana o commutativa.

2) $L = M_n(k)$, $[X,Y] = XY - YX$.

E' un'alg. di Lie: 1) bilinearità: facile

2) $[X,X]=0$ ovvio

3) verifica:

$$[X,[Y,Z]] = X(YZ-ZY) - (YZ-ZY)X =$$

$$= XYZ - XZY - YZX + ZYX$$

$$[\,,[\,,\,]]+[\,,[\,,\,]]+[\,,[\,,\,]] = \cancel{XYZ} - \cancel{XZY} - \cancel{YZX} + \cancel{ZYX} +$$

$$+ \cancel{YZX} - \cancel{YXZ} - \cancel{ZXY} + \cancel{XZY} +$$

$$+ \cancel{ZXY} - \cancel{ZYX} - \cancel{XYZ} + \cancel{YXZ} = 0$$

Con questo bracket, $M_n(k)$ si indica anche con $\mathfrak{gl}(n,k)$ o $\mathfrak{gl}(n)$.

3) Lo stesso conto dice che se M è un'algebra associativa qualsiasi, allora è anche un'algebra di Lie, con bracket

$$[A,B] = \underset{\uparrow \text{prodotto in } M}{AB} - BA$$

Oss.: Se L è un'algebra di Lie e $\dim_k L = 1$, allora L è abeliana.

Infatti, sia x_0 una base di L, cioè ogni elem. è un multiplo scalare di x_0. Dati $x,y \in L$ qualsiasi, scriviamo $x = a x_0$, $y = b x_0$, e $[x,y] = [a x_0, b x_0] = ab[x_0,x_0] = 0$.

<u>Def.</u>: Sia L un'algebra di Lie e $M \subseteq L$ un sottosp. vett.

1) M si dice <u>sottoalgebra di Lie</u> se $\forall x, y \in M$: $[x,y] \in M$.
(In tal caso M è un'algebra di Lie).

2) M si dice un <u>ideale</u> se $\forall x \in M$, $\forall y \in L$: $[x,y] \in M$.
(Dalla antisimm. deriva che è equivalente richiedere $[y,x] \in M$)

3) Sia N un'algebra di Lie e $f : L \to N$ un'appl. lineare.
f si dice <u>omomorfismo (di algebre di Lie)</u> se
$f([x,y]) = [f(x), f(y)] \quad \forall x, y \in L$.

<u>Esempi</u>: 1) $\mathfrak{sl}(n) = \{ x \in \mathfrak{gl}(n) \mid tr(x) = 0 \}$ è sottoalg. di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$
infatti $tr([x,y]) = tr(xy - yx) = tr(xy) - tr(yx) = 0$

(ma se consid. $M_n(\mathbb{R})$ con la moltiplicazione usuale $A \cdot B$, allora $\mathfrak{sl}(n)$ <u>non</u> è una sottoalgebra! es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathfrak{sl}(2)$).

2) $\mathfrak{b}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$, $\quad \mathfrak{b}^u(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$\mathfrak{h}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$ sono sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$.

3) $\mathfrak{sl}(n)$ è un ideale di $\mathfrak{gl}(n)$

4) $\mathfrak{z} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in k \right\}$ è un ideale di $\mathfrak{gl}(n)$,

e più in generale se $L \subseteq \mathfrak{gl}(n)$ è una sottoalgebra, $\mathfrak{z} \cap L$ è un ideale di L (perché gli elem. di $\mathfrak{z}$ commutano con tutti gli elem. di $\mathfrak{gl}(n)$).

5) $\mathfrak{b}^u(n)$ è un ideale di $\mathfrak{b}(n)$.

6) $\mathfrak{so}(n,k) = \{ A \in \mathfrak{gl}(n,k) \mid A + {}^tA = 0 \}$

$\mathfrak{sp}(n,k) = \{ A \in \mathfrak{gl}(n,k) \mid A J_n + J_n {}^tA = 0 \}$ (con n pari)

sono sottoalgebre di $\mathfrak{gl}(n,k)$.

Algebra di Lie di un sottogruppo chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$

Def.: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ un sgr chiuso.

Definiamo

$$Lie(G) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{tA} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

Oss.: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso e $X \in M_n(\mathbb{R})$. Visto che $\mathbb{R}$ è connesso ed exp è continua, $\{e^{tX}\}$ è un s.i. connesso di $GL(n,\mathbb{R})$. Quindi $e^{tX} \in G$ $\forall t \in \mathbb{R}$ se e solo se $e^{tX} \in G^\circ$ $\forall t \in \mathbb{R}$, in altre parole

$$Lie(G) = Lie(G^\circ).$$

Esempi: 1) $Lie(GL(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$: ovvio

2) $Lie(SL(n,\mathbb{R})) = ?$

Consid. $A \in M_n(\mathbb{R})$:

abb. visto che A è simile in $M_n(\mathbb{C})$ ad una matrice triang. sup:

$A = CBC^{-1}$ con $C \in GL(n,\mathbb{C})$ e $B \in M_n(\mathbb{C})$ triang. sup..

$tA = C(tB)C^{-1}$

Ora:
$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$
($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ = autoval. di A; $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr(B) = tr(A)$)

$$e^B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\det(e^A) = \det(e^{CBC^{-1}}) = \det(C e^B C^{-1}) =$$

$$\det(e^B) = e^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = e^{tr(A)}$$

Quindi $e^A \in SL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow e^{Tr(A)} = 1 \Rightarrow tr(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$

$\Rightarrow tr(tA) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{tTr(A)} = 1 \ \forall t \Rightarrow e^{tA} \in SL(n,\mathbb{R})$.

Cioè $Lie(SL(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

3) Consid. $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = I_n\}$

Data $X \in M_n(\mathbb{R})$, se $X + {}^tX = 0$ allora

$$s\,{}^tX = -sX \overset{\forall s\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} e^{s\,{}^tX} = e^{-sX} \Rightarrow {}^t(e^{sX}) = (e^{sX})^{-1} \Rightarrow X \in Lie(O(n,\mathbb{R})).$$

Viceversa, sia $X \in Lie(O(n,\mathbb{R}))$, quindi ${}^t(e^{sX}) = (e^{sX})^{-1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{s\,{}^tX} = e^{-sX}$ $\forall s\in\mathbb{R}$, allora prendiamo $s_0 \neq 0$ molto piccolo tale che $\|s_0\,{}^tX\|$ e $\|-s_0X\|$ siano così piccole da poter dedurre $s_0\,{}^tX = -s_0X$ e allora ${}^tX = -X$, da cui

$$Lie(O(n,\mathbb{R})) = so(n,\mathbb{R}).$$

Strano, i nomi non corrispondono! Motivo: $SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R})^0$, quindi

$$Lie(SO(n,\mathbb{R})) = Lie(O(n,\mathbb{R})) \left(= so(n,\mathbb{R})\right).$$

4) Consid. $Sp(\overset{\text{pari}}{n},\mathbb{R}) = \{ AJ_n\,{}^tA = J_n \}$ e $sp(n,\mathbb{R}) = \{XJ_n + J_n\,{}^tX = 0\}$

Data $X \in sp(n,\mathbb{R})$ abb. $\quad s\cdot X = -J_n\, s\,{}^tX\, J_n^{-1} \qquad \forall s\in\mathbb{R}$

$$e^{sX} = J_n\, e^{-s\,{}^tX} J_n^{-1} = J_n ({}^te^{sX})^{-1} J_n^{-1}$$

$$e^{sX} J_n\, {}^t(e^{sX}) = J_n \qquad \forall s\in\mathbb{R}$$

quindi $X \in Lie(Sp(n,\mathbb{R}))$.

Viceversa se $e^{sX} J_n\, {}^t(e^{sX}) = J_n$ $\forall s$ per una X, cioè se $X \in Lie(Sp(n,\mathbb{R}))$,

allora $$e^{sX} = J_n\, e^{-s\,{}^tX} J_n^{-1} = e^{-s J_n\,{}^tX J_n^{-1}}$$

Con $s_0 \neq 0$ abb. piccolo deduciamo $s_0 X = -s_0 J_n {}^t X J_n^{-1}$ cioè

$X J_n + J_n {}^t X = 0$, e allora $X \in sp(n, \mathbb{R})$.

In conclusione: $\mathrm{Lie}(Sp(n,\mathbb{R})) = sp(n,\mathbb{R})$.

<u>Obiettivo:</u> dimostrare che $\mathrm{Lie}(G)$ è una sottoalgebra di Lie di $gl(n,\mathbb{R})$.
Per farlo, dobbiamo studiare il prodotto $e^X e^Y$.

<u>Lemma:</u> Esiste $\varepsilon > 0$, una funzione continua R definita su $B(0,\varepsilon) \times B(0,\varepsilon) \subseteq M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ e una costante $C > 0$ tali che

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+R(X,Y)} \qquad \forall X, Y \in B(0,\varepsilon)$$

e tale che $\|R(X,Y)\| \leq C(\|X\| + \|Y\|)^3$.

<u>Dim.:</u> Poniamo

$$R(X,Y) = \log\left(e^X e^Y\right) - X - Y - \frac{1}{2}[X,Y]$$

E' ben definita per $\|X\|$ e $\|Y\|$ abbast. piccoli, perché allora e^X ed e^Y sono abb. vicini all'identità, e vale

$$\log\left(e^X e^Y\right) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + R(X,Y)$$ e basta applicare exp.

Invece per dim. la stima procediamo in modo indiretto.

Consid. $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, $t, s \in \mathbb{R}$, e il prodotto

$$e^{sX} e^{tY}$$

Per quanto visto finora, se (s,t) è in un intorno opportuno di $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ allora esiste una funzione Z tale che

$$e^{sX} e^{tY} = e^{Z(s,t)} \qquad \left(Z(s,t) = \log\left(e^{sX} e^{tY}\right) \right)$$

Esplicitiamo le serie di potenze (oss. che $e^{sX} e^{tY} - I_n$ è serie di potenze in s e t senza termine noto!)

$$Z(s,t) = \left(e^{sX} e^{tY} - I_n\right) - \frac{1}{2}\left(e^{sX} e^{tY} - I_n\right)^2 + (\dots)$$

$$= \left(\left(I_n + sX + \frac{1}{2} s^2 X^2\right)\left(I_n + tY + \frac{1}{2} t^2 Y^2\right) - I_n\right) - \frac{1}{2}\left(sX + tY\right)^2 + (\dots)$$

$$= \left(sX + tY + \frac{1}{2} s^2 X^2 + st XY + \frac{1}{2} t^2 Y^2\right) - \frac{1}{2}\left(s^2 X^2 + st(XY + YX) + t^2 Y^2\right) + (\dots)$$

$$= sX + tY + \frac{st}{2}[X,Y] + (\dots)$$

dove $(\dots)$ contiene monomi in s,t di grado totale > 2.

Segue
$$Z(s,t) - sX - tY - \frac{st}{2}[X,Y] \left(= R(sX, tY)\right) =$$

$$= s^3 F_1(sX, tY) + s^2 t F_2(sX, tY) + st^2 F_3(sX, tY) + t^3 F_4(sX, tY)$$

con F_i f.ni continue definite in un intorno di 0. Deduciamo

$\|R(sX, tY)\| \leq C(|s| + |t|)^3$ per una costante C opportuna.

C dipende da X e da Y, ma se supp. per esempio $\|X\|, \|Y\| = 1$ allora esiste C che vale per ogni X, Y siffatte.

Date ora X, Y non nulle di norma abb. piccola, applichiamo la stima vista a $X_0 = \frac{X}{\|X\|}$, $Y_0 = \frac{Y}{\|Y\|}$, $s = \|X\|$, $t = \|Y\|$ (quindi $sX_0 = X$, $tY_0 = Y$) ottenendo

$\|R(X,Y)\| \leq C(\|X\| + \|Y\|)^3$..

$\square$

Vediamo ora il problema inverso: come ottenere e^{X+Y} in qualche modo da e^X ed e^Y.

<u>Idea:</u> Riscalare X e Y e provare a fare un limite nella formula del lemma prec..

$$\left(e^{\frac{X}{k} + \frac{Y}{k}}\right)^k = e^{X+Y}, \quad \left(e^{\frac{X}{k}}\right)^k = e^X, \quad \left(e^{\frac{Y}{k}}\right)^k = e^Y,$$

invece $$\left(e^{[\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}]}\right)^k = \left(e^{\frac{1}{k^2}[X,Y]}\right)^k = e^{\frac{1}{k}[X,Y]} \longrightarrow 0$$

similmente $$\left(e^{R(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k})}\right)^k \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty$$

<u>Proposizione</u>: Date $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ abb.

$$e^{X+Y} = \lim_{k \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y}\right)^k$$

$$e^{[X,Y]} = \lim_{k\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} e^{-\frac{1}{k}X} e^{-\frac{1}{k}Y}\right)^{k^2}.$$

Dim.: Dal lemma, per k abb. grande abbiamo

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} = e^{\frac{1}{k}(X+Y)+\frac{1}{2k^2}[X,Y]+R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})}$$

e $\|R(X/k, Y/k)\| \leq C(\|X/k\|+\|Y/k\|)^3 = C\cdot\frac{1}{k^3}(\|X\|+\|Y\|)^3$

da cui $\lim_{k\to+\infty} k^2\left(R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})\right)=0$,

Allora

$$\left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y}\right)^k = e^{X+Y+\frac{1}{2k}[X,Y]+k\,R(X/k,\frac{Y}{k})} \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{X+Y}$$

Inoltre

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} e^{-\frac{1}{k}X} e^{-\frac{1}{k}Y} = e^{\frac{1}{k}(X+Y)+\frac{1}{2k^2}[X,Y]+R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})} \quad = A(k)$$

$$\cdot\, e^{-\frac{1}{k}(X+Y)+\frac{1}{2k^2}[X,Y]+R(-\frac{X}{k},-\frac{Y}{k})} \quad = B(k)$$

$$=$$

$$= e^{A(k)+B(k)+\frac{1}{2}[A(k),B(k)]+R(A(k),B(k))} =$$

$$= e^{\frac{1}{k^2}[X,Y]+R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})+R(\frac{-X}{k},\frac{-Y}{k})+\frac{1}{2}[A(k),B(k)]+R(A(k),B(k))}$$

Oss.: $A(k)=\frac{1}{k}\tilde{A}(k)$ e $B(k)=\frac{1}{k}\tilde{B}(k)$ con $\tilde{A}(k)$ e $\tilde{B}(k)$ limitate, per cui $\|R(A(k),B(k))\| \leq \tilde{C}\cdot\frac{1}{k^3}$, inoltre $\tilde{A}(k)\to X+Y$, $\tilde{B}(k)\to -(X+Y)$ per $k\to+\infty$

Quindi l'espressione di prima elevata alla k^2 viene

$$e^{[X,Y] + k^2 R\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}\right) + k^2 R\left(\frac{-X}{k}, \frac{-Y}{k}\right) + k^2 R(A(k), B(k)) + \frac{k^2}{2}[A(k),B(k)]}$$

che tende a $e^{[X,Y]}$ per $k \to +\infty$, perché

$$k^2 [A(k), B(k)] = [\tilde{A}(k), \tilde{B}(k)] \xrightarrow[k \to +\infty]{} [X+Y, -(X+Y)] = 0$$

$\square$

Teorema: Se G è un sgr chiuso di $GL(n, \mathbb{R})$, allora $\mathrm{Lie}(G)$ è una sottoalg. di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Dim.: Che sia un s.v. chiuso per riscalaggio per reali è ovvio, chiusura per somma e per bracket segue dalla proposizione.

$\square$

Coordinate logaritmiche su sottogruppi chiusi

Teorema: Sia $H \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sottogruppo chiuso e sia $\mathfrak{h} = Lie(H)$. Esiste un intorno V di 0 in $\mathfrak{gl}(n)$ e un intorno U di I_n in $GL(n,\mathbb{R})$ tali che $\exp(\mathfrak{h} \cap V) = H \cap U$, ed $\exp|_{\mathfrak{h}\cap V} : \mathfrak{h}\cap V \to H \cap U$ è un omeomorfismo.

Oss.: Chiaramente $V \cap \mathfrak{h}$ è int. ap. di 0 in $\mathfrak{h}$ e $U \cap H$ è int. ap. di I_n in H.

Dim.: Ricordiamo il prodotto scalare su $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ scritto come $tr(A \cdot {}^tB)$. Sia $W = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(X \cdot {}^tY) = 0 \ \forall Y \in Lie(H)\}$ il complem. ortogonale, quindi

$$M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{h} \oplus W$$

Definiamo un'appl. C^∞
$$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$$
$$X \longmapsto e^{X_1} e^{X_2}$$

dove $X = X_1 + X_2$ e $X_1 \in Lie(H)$, $X_2 \in W$. Oss. $\varphi(0) = I_n$,

e
$$\varphi(tX) = \left(I_n + tX_1 + \frac{t^2}{2}X_1^2 + \dots\right)\left(I_n + tX_2 + \frac{t^2}{2}X_2^2 + \dots\right)$$
$$= I_n + tX + t^2 \cdot F(t,X) \quad \text{con } F(t,X) \ C^\infty.$$

Segue che il differenziale di φ in 0 è l'identità.

Per il teorema della funzione inversa, esiste $\sigma > 0$ tale che

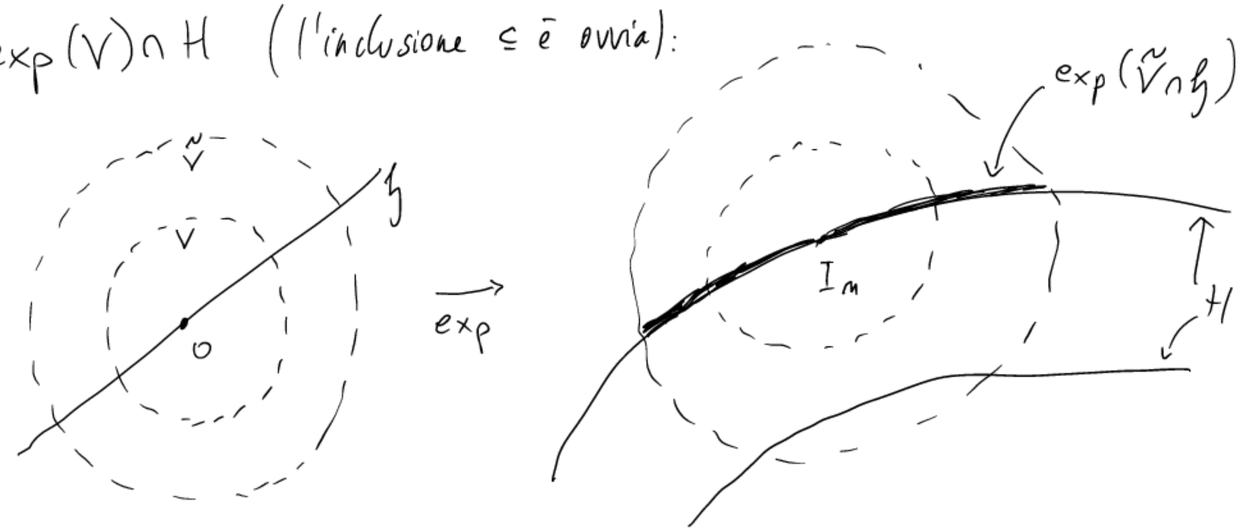
$$\varphi\big|_{B(0,\sigma)} : B(0,\sigma) = \tilde{V} \longrightarrow \varphi\big(B(0,\sigma)\big) = \tilde{U}$$

ha immagine $\tilde{U}$ aperta, è un omeom. C^∞ con inversa C^∞.

Chiaramente $\varphi\big|_{\tilde{V}\cap\mathfrak{h}}$ è uguale a $\exp\big|_{\tilde{V}\cap\mathfrak{h}}$, ed

è un omeomorfismo $\tilde{V}\cap\mathfrak{h} \longrightarrow \exp(\tilde{V}\cap\mathfrak{h})$. Vale la stessa cosa anche prendendo $V \subseteq \tilde{V}$ intorno aperto di 0 in $\mathfrak{gl}(n)$.

Dim. che possiamo scegliere $V \subseteq \tilde{V}$ tale che $\exp(V\cap\mathfrak{h}) = \exp(V)\cap H$ (l'inclusione $\subseteq$ è ovvia):

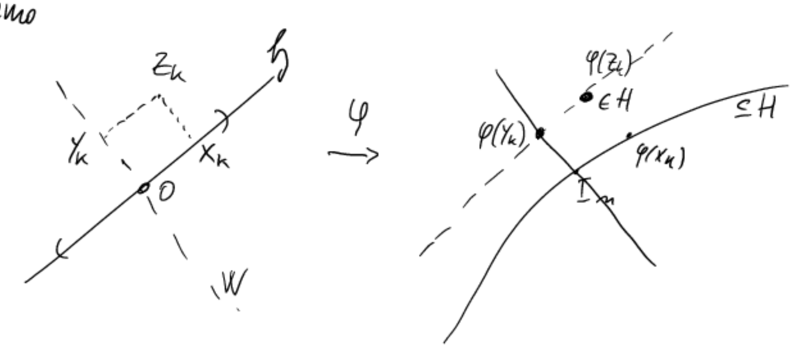


Come prima cosa, studiamo $\varphi(B(0,\varepsilon))\cap H$ al variare di ε. Vogliamo dim. che con ε piccolo si ha $\varphi(B(0,\varepsilon))\cap H \subseteq \exp(B(0,\varepsilon)\cap\mathfrak{h})$.

Per assurdo, supponiamo che $\forall \varepsilon \in]0,\sigma]$ valga

$$\varphi(B(0,\varepsilon))\cap H \not\subseteq \exp(B(0,\varepsilon)\cap\mathfrak{h}) =: E(\varepsilon)$$

cioè $\forall k \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\exists Z_k \in B(0, \frac{\sigma}{k})$ t.c. $\varphi(Z_k) \in H$ ma $\varphi(Z_k) \notin E(\frac{\sigma}{k})$. Scriviamo

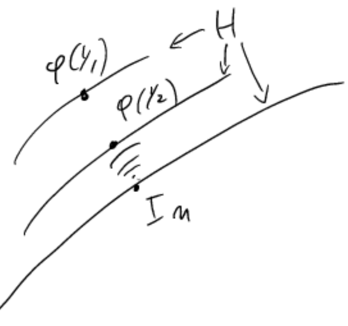


$Z_k = X_k + Y_k$

dove $X_k \in \mathrm{Lie}(H)$

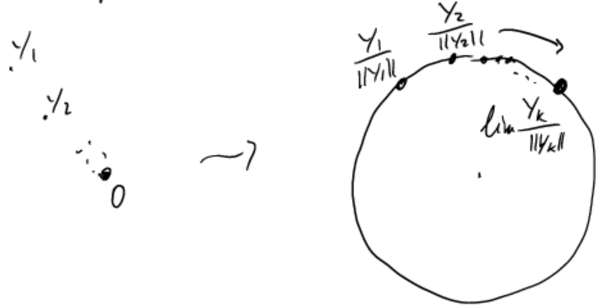
e $Y_k \in W$, $Y_k \neq 0$.

Ric.: $\varphi(Z_k) = e^{X_k} e^{Y_k}$. D'altronde $\varphi(Z_k)$, e^{X_k} sono in H, perciò $e^{Y_k} \in H$. Oss.: $\|Z_k\| < \frac{\sigma}{k}$, e allora $\|Y_k\| < \frac{\sigma}{k}$:



Ora l'idea è di rimpiazzare gli Y_k con una <u>curva</u> del tipo e^{tY}, <u>tutta</u> contenuta in H, con $Y \in W$. Però non è detto che <u>questi</u> Y_k siano su una tale curva! (Pensare a $\dim W > 1$ ...)

Allora si procede così: si normalizzano gli Y_k e li si fa convergere su una sfera. Per il punto limite passerà la curva voluta. In realtà gli Y_k si „quasi normalizzano", usando multipli interi. Questo sarà utile.



Cioè si sceglie per ogni $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un intero $m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che

$\sigma \leq m_k \|Y_k\| \leq 2\sigma$.

La successione $m_k Y_k$ è limitata, rimpiazziamola con una sottosucc. convergente e poniamo $Y = \lim_{k \to +\infty} m_k Y_k$. Abb. $Y \in W$, e $\|Y\| \geq \sigma$ quindi $Y \neq 0$.

Inoltre $e^{Y_k} \in H$, quindi $e^{m_k Y_k} \underset{\substack{\uparrow \\ m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}}{=} \left(e^{Y_k}\right)^{m_k} \in H$, quindi

$e^Y \in H$.

Dim. che $e^{tY} \in H$ $\forall \underline{t \in \mathbb{R}}$. Scriviamo $t m_k = a_k + b_k$ con $a_k \in \mathbb{Z}$ e $b_k \in [0,1[$. Allora

$$e^{t m_k Y_k} = \left(e^{Y_k}\right)^{a_k} e^{b_k Y_k}$$

D'altronde $t b_k Y_k \xrightarrow{k \to +\infty} 0$ perché $Y_k \to 0$ e b_k è limitata, per cui $e^{t b_k Y_k} \to I_n$. Concludiamo:

$$e^{tY} = \lim_{k \to +\infty} e^{t m_k Y_k} = \lim_k \left(e^{Y_k}\right)^{a_k} \in H.$$

Cioè $Y \in \mathfrak{h} \cap W$ ma $Y \neq 0$: assurdo. Segue: $\exists \varepsilon > 0 \mid$ $\varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H \subseteq \exp(B(0,\varepsilon) \cap \mathfrak{h})$.

Sia allora $V = B(0,\varepsilon)$ e $U = \varphi(B(0,\varepsilon))$. Abb.

$$\exp(V \cap \mathfrak{h}) = \varphi(B(0,\epsilon) \cap \mathfrak{h}) \subseteq \varphi(B(0,\varepsilon)) \cap H \subseteq \exp(B(0,\varepsilon) \cap \mathfrak{h}) = \exp(V \cap \mathfrak{h})$$

e allora $\exp(V \cap \mathfrak{h}) = U \cap H$. $\square$

Corollario: Sia G sgr chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$.
$\exp(\mathrm{Lie}(G))$ genera G^0.

Per la dim.:

Lemma: Sia G gruppo top. connesso, e U un intorno di e_G.
Allora U genera G.

Dim. del lemma: Sia H il sgr generato da U, allora $H \overset{\neq\emptyset}{}$ è aperto, perché se contiene $h \in H$ allora contiene l'intorno aperto $h \cdot U$ di h.
Ma allora H è anche chiuso, perciò $H = G$ per connessione di G.

$\square$

Dim. del corollario: $\exp(\mathrm{Lie}(G))$ contiene un int. di I_n in G per il teorema prec., ed è cont. in G^0. $\square$

Esercizio: Siano $G, H \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr. chiusi connessi. Se $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(H)$ allora $G = H$.

Struttura di var. differenziabile su sottogruppi chiusi

Richiami di geom. diff.:

Def.: Una <u>varietà differenziabile</u> di dim. ≥ 0 è uno spazio topologico M di Hausdorff 2°-numerabile, dotato di un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ e per ogni i un omeomorfismo $\varphi_i : U_i \to V_i$ dove $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, e

$$\forall i,j : \quad \varphi_j \circ \left(\varphi_i^{-1} \Big|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} \right) : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \quad \text{è } C^\infty.$$

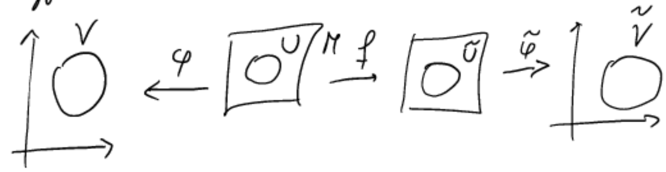
In tal caso, la collezione $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_i$ si chiama <u>atlante</u> (C^∞) di M, e le φ_i si chiamano <u>carte locali</u>. Possiamo assumere che l'atlante sia <u>massimale</u>, cioè se $\varphi : U \to V$ è compatibile con le carte locali allora è già nell'atlante.

Def.: Sia M una var. diff. di dim. n, e $N \subseteq M$. N è una <u>sottovarietà immersa</u> (embedded) di dimensione $m\ (\leq n)$ se in ogni p.to <u>di N</u> la var. M ha una carta locale $\varphi : U \to V$ t.c.

$$\varphi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_n) \in U \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Oss.: 1) In questo caso N è una var. diff. con le carte locali indotte per restrizione di quelle di M.

2) Un'applicazione $M \to \tilde{M}$ di var. diff. si dice C^∞ se lo sono tutte le composizioni con le carte locali $\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$



3) Date due var. diff. M_1, M_2, è def. naturalm. una str. di var. diff. su $M_1 \times M_2$.

Def.: Un gruppo di Lie (su $\mathbb{R}$) è un gruppo topol. con strutt. di varietà diff. tale che l'operazione di gruppo e l'inversione sono C^∞.

Teorema: Sia $G \leq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso. Allora G è una sottovar. immersa di $GL(n, \mathbb{R})$ (= aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$) ed è un gruppo di Lie.

Dim.: Abbiamo già visto che esiste un intorno aperto V di 0 in $M_n(\mathbb{R})$ tale che $\exp(V)$ è intorno ap. di I_n in $GL(n, \mathbb{R})$, $\exp|_V : V \to \exp(V) = U$ è C^∞ con inversa C^∞. Per il teorema precedente, a meno di restringere U possiamo assumere:

$$\forall X \in V: \; e^X \in G \iff X \in Lie(G).$$

Quindi $\left(\exp|_V\right)^{-1} = \varphi$ è carta locale in I_n per $GL(n,\mathbb{R})$ tale che G è dato (in coordinate) dall'annullarsi di alcune coordinate: basta cambiare base in $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ scegliendo i primi vettori dentro $Lie(G)$ e i rimanenti fuori.

In un punto qualsiasi $g_0 \in G$ basta prendere l'intorno

$$U_{g_0} = g_0 \cdot U \quad \text{e la carta locale} \quad \begin{aligned} U_{g_0} &\longrightarrow V \\ g_0 h &\longmapsto \log(h) \\ x &\longmapsto \log(g_0^{-1} x) \end{aligned}$$

$\square$

$M_n(\mathbb{C})$? $GL(n,\mathbb{C})$?

Applichiamo quanto visto per $GL(n,\mathbb{R})$ e i suoi sottogr. chiusi a $GL(n,\mathbb{C})$ e ai suoi sgr chiusi, vedendo tutto dentro $M_{2n}(\mathbb{R})$.

Prima di tutto osserviamo che $M_n(\mathbb{C})$ si può considerare come sottoalgebra associativa (col prodotto usuale di matrici) di $M_{2n}(\mathbb{R})$, basta identificare $i \in \mathbb{C}$ con la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) = \underline{i} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

Concretamente, consideriamo

$$\{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot A\} = \bar{M}$$

Scriviamo una tale A a blocchi $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}, \quad A \cdot \underline{i} = \begin{pmatrix} -C & B \\ -E & D \end{pmatrix}, \quad \underline{i} \cdot A = \begin{pmatrix} D & E \\ -B & -C \end{pmatrix}$$

da cui $D = -C$, $B = E$, cioè A è della forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{\text{la „parte reale"}} + \underline{i} \underbrace{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{\text{la „parte immaginaria"}}$$

Proposizione: $\bar{M} \xrightarrow{F} M_n(\mathbb{C})$ è isomorfismo di spazi vettoriali reali

$A \longmapsto B + iC$

ed è compatibile con il prodotto usuale $\left(F(A_1 \cdot A_2) = F(A_1) \cdot F(A_2)\right)$

cioè F è un isom. di algebre associative.

Dim.: Una verifica diretta è semplice! Si può vedere ancora più facilmente in $M_{2n}(\mathbb{C})$, consid.

$$\bar{M} \subseteq M_{2n}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2n}(\mathbb{C}) \supseteq \tilde{M} = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \middle| \, X \in M_n(\mathbb{C}) \right\} \cong M_n(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \mapsto X$$

Allora F diventa

$F : \bar{M} \to \tilde{M}$

$$\begin{pmatrix} B+iC & 0 \\ 0 & B+iC \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \underline{i} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

ed è ancora più semplice verificare che F è isom. di alg. associative su $\mathbb{R}$.

$\square$

Oss.: 1) Dalla prop. segue che $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come algebra di Lie su $\mathbb{R}$ è isomorfa (si può identificare come prima) a $\bar{M}$, sottoalg. di Lie (su $\mathbb{R}$) di $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$.

2) possiamo identificare il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ (che è formato dagli elt invertibili dell'alg. associativa $M_n(\mathbb{C})$) con gli elem. invertibili dell'alg. associativa $\bar{M}$, cioè identifichiamo $GL(n, \mathbb{C})$ con $\bar{M} \cap GL(2n, \mathbb{R})$. Questo „rende" $GL(n, \mathbb{C})$ un sgr chiuso di $GL(2n, \mathbb{R})$. I sgr chiusi di $GL(n, \mathbb{C})$ si identificano allora a loro volta con sgr chiusi di $GL(2n, \mathbb{R})$.

3) Possiamo allora applicare tutta la teoria vista anche a sgr chiusi di $GL(n, \mathbb{C})$.
Ma ATTENZIONE:

a) il parametro $t \in \mathbb{R}$ usato spesso rimane reale! Cioè dato $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ chiuso, abb.

$$\mathrm{Lie}(G) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid e^{tA} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

b) $\mathrm{Lie}(G)$ così definita è una sottoalgebra di Lie <u>reale</u> di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, in generale <u>non complessa</u>!

<u>Esempio</u>: $\{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A^{-1} \} = \{ \text{matrici unitarie} \} = U(n)$

e vale $\mathrm{Lie}(U(n)) = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + {}^t\bar{X} = 0 \} = \mathfrak{u}(n)$,

la dim. è simile alla dim. che $\mathrm{Lie}(O(n, \mathbb{R})) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

<u>Lo spazio tangente a $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$</u>

<u>Def.</u>: Sia M sottovarietà diff. immersa in $\mathbb{R}^N$, e $p \in M$.

Definiamo <u>lo spazio tangente a M in p</u>:

$$T_pM = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : J \longrightarrow M \text{ di classe } C^\infty, \; J \subseteq \mathbb{R} \text{ un intervallo aperto contenente } 0, \; \alpha(0) = p \}$$

<u>Oss</u>: Ricordiamo dalla geom. diff. che T_pM è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^N$, e $\dim_{\mathbb{R}} T_pM$ come sp. vett. $= \dim(M)$ come varietà differenziabile.

<u>Teorema</u>: Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso. Abb.

$$\mathrm{Lie}(G) = T_{I_n} G$$

sp. tangente alla var. G in $I_n \in G$

Dim.: $\subseteq$] Data $X \in Lie(G)$, basta porre $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow G$
$t \longmapsto e^{tX}$

e ricordare che $\alpha'(0) = X$.

$\supseteq$] Sia $v \in T_{I_n}(G)$, e $\alpha: J \longrightarrow G$ con $\alpha'(0) = v$.

Rimpiccioliamo J in modo tale da poter scrivere

$\alpha(t) = e^{\beta(t)}$ con $\beta: J \longrightarrow Lie(G)$ di classe C^∞,

e $\beta(0) = 0$ $\quad (\beta(t) = \log(\alpha(t)))$

Osserviamo che $\beta'(0) = \frac{d}{dt}(t\beta'(0))\Big|_{t=0}$ con γ C^∞

$$v = \frac{d}{dt} e^{\beta(t)}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t\beta'(0)}\Big|_{t=0}$$

$$= \beta'(0) \in Lie(G).$$

perché la curva β è tutta cont. in $Lie(G)$.

$\square$

Altri esempi: $\mathcal{B}(n) = \{$ matr. triang. sup. invertibili $\} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$

$$\mathcal{B}^u(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$$

Abb. $Lie(\mathcal{B}(n)) = \mathfrak{b}(n)$, $Lie(\mathcal{B}^u(n)) = \mathfrak{b}^u(n)$

Dim.: $\mathfrak{b}(n) \subseteq Lie(\mathcal{B}(n))$ perché se $A \in \mathfrak{b}(n)$ allora $(tA)^m \in \mathfrak{b}(n)$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, quindi $A \in Lie(\mathcal{B}(n))$.

$$\mathfrak{b}(n) \cong Lie(B(n)) \quad \text{perché}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{b}(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come s.var.} \\ \text{diff. di } GL(n,\mathbb{R})}}{\dim(B(n))} = \dim_{\mathbb{R}}\left(Lie(B(n))\right).$$

dim. di $Lie(B^u(n)) = \mathfrak{b}^u(n)$: simile.

Per dimostrare $\mathfrak{b}(n) \cong Lie(B(n))$ si può usare anche il logaritmo, opp. la formula $X = \frac{d}{dt} e^{tX}\Big|_{t=0}$. Più avanti vedremo ancora un'altra dim. di $\mathfrak{b}(n) \cong Lie(B(n))$ che non usa la dim. di $B(n)$ come var. differenziabile.

Cenni sulla def. dell'algebra di Lie per un gruppo di Lie generale

Si prende G gruppo di Lie, si considerano campi vettoriali tangenti a G, cioè applicazioni C^∞ del tipo $g \longmapsto v_g \in T_g G$ per $g \in G$. Per definirli correttamente, si interpretano i vettori di $\mathbb{R}^n$ identificandoli con le corrispondenti derivate direzionali, e identificando un campo vettoriale C^∞ su $\mathbb{R}^n$: $x \longmapsto v_x$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $v_x \in \mathbb{R}^n$) con l'applicazione

$$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$
$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v_x}$$

Risutano tutte applicazioni che soddisfano la regola di Leibnitz:

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g).$$

Inoltre vale il viceversa: ogni δ siffatta corrisp. a un campo vettoriale.

Conseguenza: si possono definire i campi vettoriali tangenti a una varietà diff. astratta M come le derivazioni di $C^\infty(M, \mathbb{R})$, cioè

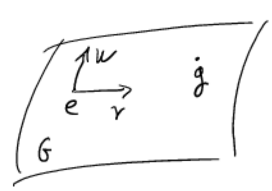
$$\{ \delta : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \mid \delta \text{ lineare}, \ \delta(fg) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g) \}$$

Inoltre in generale $\delta \circ \varepsilon$ non è una derivazione, e avviene che $\delta \circ \varepsilon$ può essere diverso da $\varepsilon \circ \delta$, ma vale:

$\delta \circ \varepsilon - \varepsilon \circ \delta$ <u>è</u> una derivazione.

Questo si usa per definire la struttura di algebra di Lie su $T_e G$ dove G è un gruppo di Lie:

siano $v, w \in T_e G$



si creano due campi vettoriali $\underline{V}$, $\underline{W}$ su G, definendo

$\underline{V}_g \in T_g G$ come l'immagine di v tramite il differenziale di $G \xrightarrow{L_g} G$, $x \longmapsto gx$ in $e \in G$

e si definisce $[v, w]$ in $T_e G$ come $\underline{V} \circ \underline{W} - \underline{W} \circ \underline{V}$.

Omomorfismi di gruppi

Proposizione: Siano $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ e $H \subseteq GL(m, \mathbb{R})$ sgr chiusi.

Sia $\varphi : G \to H$ omomorfismo di gruppi, continuo.

Esiste un unico omom. di alg. di Lie

$d\varphi : Lie(G) \to Lie(H)$, chiamato il differenziale di φ,

tale che $\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)}$ $\forall X \in Lie(G)$.

Dim.: Dato $X \in Lie(G)$, consid. $t \mapsto \varphi(e^{tX})$: è un omom. $(\mathbb{R}, +) \to H$ continuo, per cui esiste unica $Y \in Lie(H)$ con $\varphi(e^{tX}) = e^{tY}$ $\forall t$. Poniamo $d\varphi(X) = Y$.

Dimostriamo che $d\varphi$ è lineare e compatibile col bracket:

1) compatibilità con moltiplicaz. per $s \in \mathbb{R}$: ovvio.

2) ——— con la somma: siano $X, Z \in Lie(G)$, allora

$$\varphi\left(e^{t(X+Z)}\right) = \varphi\left(e^{tX+tZ}\right) = \lim_{k\to+\infty} \varphi\left(\left(e^{\frac{1}{k}tX} e^{\frac{1}{k}tZ}\right)^k\right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\varphi\left(e^{\frac{1}{k}tX}\right) \cdot \varphi\left(e^{\frac{1}{k}tZ}\right)\right)^k =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{k}t\, d\varphi(X)} \cdot e^{\frac{1}{k}t\, d\varphi(Z)}\right)^k = e^{t(d\varphi(X)+d\varphi(Z))}$$

da cui $d\varphi(X+Z) = d\varphi(X) + d\varphi(Z)$.

3) compatibilità col bracket, cioè $d\varphi([X,Y]) = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]$: si usa la formula vista per $e^{[X,Z]}$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Se G, H, φ sono come nella prop., allora φ è C^∞.

<u>Dim.</u>: La formula $\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)}$ ci dice che

$$\varphi(A) = e^{d\varphi(\log(A))} \quad \text{per } A \in G \text{ abbastanza vicino a } I_n.$$

Quindi φ è C^∞ in un intorno di I_n.

Inoltre $$\varphi(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{variabile}\\ \text{vicino a } I_n}}{A}\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fissata}}}{B}) = \varphi(A)\cdot\varphi(B), \quad \varphi(A) = \varphi(A\cdot B)\,\varphi^{-1}(B)$$

mostra che φ è C^∞ in un intorno di B, $\forall B \in G$. $\square$

Nella prossima sezione vedremo esempi di omomorfismi continui.

Rappresentazioni: prime def. ed esempi.

Oss.: Dato V sp. vett. qualsiasi, su k campo $GL(V) = \{f: V \to V \text{ isom. lineare}\}$, $\mathrm{End}(V) = \{f: V \to V \text{ lineare}\}$, è un'algebra associativa col prodotto dato dalla composizione. Questo induce una str. di algebra di Lie col bracket $[f,g] = f\circ g - g\circ f$ e l'alg. di Lie si denota con $\mathfrak{gl}(V)$.

Se V ha dim. finita $= n$ possiamo fissare una base e questo induce isomorfismi $GL(V) \cong GL(n,k)$, $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n,k)$.

Def.: 1) Sia G un gruppo, k un campo qualsiasi.

Una rappresentazione di G (su k) è un omom. di gruppi $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$, dove V è uno sp. vett. su k.

2) Data un'alg. di Lie L (su k), una rappresentazione di L è un omom. di algebre di Lie $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

3) In entrambi i casi, V si dice anche un $(G\text{-})$modulo, rispett. $(L\text{-})$modulo. Dati $g \in G$ e $v \in V$, il vettore $(\varphi(g))(v)$ si scrive anche $g \cdot v$ o gv, se è chiaro quale φ si sta consid.. Dati $x \in L$ e $v \in V$, il vettore

$(\varphi(x))(v)$ si scrive anche $x . v$ o xv.

4) Un sottosp. vett. $W \subseteq V$ si dice un $(G\text{- opp. } L\text{-})$ sottomodulo di V se $\forall g \in G\ \forall w \in W : g.w \in W$, risp. $\forall x \in L\ \forall w \in W\ x.w \in W$.

5) V (opp. φ) si dice irriducibile se V ha esattam. due sottomoduli V e $\{0\}$ (che sono sempre sottomoduli, ovviamente)

In particolare se V è irriducibile allora $V \supsetneq \{0\}$ (cioè $\dim(V) > 0$).

6) V (opp. φ) si dice completam. riducibile se V è somma diretta di sottomoduli irriducibili (anche con infiniti addendi). Per def. V (opp. φ) si dice completam. riducibile anche se $V = \{0\}$, che

viene interpretato come la somma diretta di „nessun" sottomodulo irriducibile.

7) Dati due moduli V, W, la somma diretta $V \oplus W$ ha struttura naturale di modulo:

$$g \cdot (v+w) = g \cdot v + g \cdot w \qquad (\text{dati } g \in G,\ v \in V, w \in W)$$

rispettiv. $x.(v+w) = x.v + x.w \qquad (\text{dato } x \in L)$.

<u>Oss.</u>: Se G è un gruppo topologico, $k = \mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$, e V ha dim. finita, allora $GL(V)$ è identif. con $GL(n,k)$ ed è naturale considerare rappr. <u>continue</u> $\varphi: G \to GL(V)$.
(Questo si fa anche con V di dim. infinita, ma bisogna decidere che topologia mettere su $GL(V) \subseteq End(V)$ = sp. vett. su k di dim. infinita.)

<u>Oss.</u>: Se un modulo ha dim. 1 è automaticam. irriducibile.

<u>Esempi</u>: 1) Se $G \subseteq GL(n,k)$ allora $V = k^n$ è naturalm. un G-modulo, tramite l'inclusione $\varphi: G \to GL(n,k)$.
Qui $g \cdot v$ è semplicem. la moltipl. matrice $\times$ vettore.

Questo V è irriducibile, perché dato $W \subseteq V$ sottom. $\neq \{0\}$, abb. $\exists w \in W \setminus \{0\}$, e $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $\exists g \in G$ / $g \cdot w = v$, quindi $W = V$.

2) Se $\varphi: G \longrightarrow H \subseteq GL(m, \mathbb{R})$ è un omom., allora $W = \mathbb{R}^m$

è un G-modulo, $\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{str. di } G\text{-modulo}}}{g \cdot v} = \varphi(g)v \leftarrow$ prodotto matr. x vett.

3) Sia $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ l'appl. banale, $\varphi(g) = Id_V$, allora V (opp. φ) si chiama <u>banale</u>. Ogni sottosp. vett. $W \subseteq V$ è sottomodulo, quindi V è completam. riducibile $\left(V = \bigoplus_{e \in \text{base}} ke\right)$.

4) $P = \left\{ \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{array}{l} \ell\{ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{*} & \boxed{*} \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \}n-\ell \end{array} \right\} \subseteq GL(n, k)$, con le colonne divise in $\underbrace{\ }_{\ell}\ \underbrace{\ }_{n-\ell}$ $\qquad (e_1, \dots, e_n)$ base canonica di k^n

abb.: $\mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_\ell\} = W$ è un P_ sottomodulo

5) $G = (k, +)$

$$\varphi: G \longrightarrow GL(2, k)$$
$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I sottomoduli: $\{0\}$, ke_1, k^2

quindi φ non è irriducibile, non è neppure completamente riducibile!

6) $G = (k_{\neq 0}, \times) = k^*$

$$\varphi: k^* \longrightarrow GL(n, k)$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix}$$

Ogni sottosp. vettoriale è un G-sottomodulo, ma φ non è banale!

7) $$k^* \to GL(n,k)$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{a_n} \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

Alcuni s.moduli: $ke_1, \dots, ke_n$.

8) $$GL(n,k) \longrightarrow GL(n,k)$$
$$A \longmapsto {}^tA^{-1}$$

è omom. di gruppi $\left({}^t(AB)^{-1} = {}^t(B^{-1}A^{-1}) = {}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1} \right)$

e rende k^n un $GL(n,k)$-modulo.

9) In modo simile, ogni autom. di $GL(n,k)$ fornisce una struttura diversa di G-modulo a k^n.

10) Sia $\varphi : G \to GL(V)$ una rappresentazione.
Il duale V^* ha un struttura naturale di G-modulo:

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1}v)$$

$$\left(\text{cioè } \tilde{\varphi} : G \to GL(V^*) \atop g \longmapsto (f \mapsto f(g^{-1} -)) \right)$$

Verifichiamo che è una rappresentazione:

$$\tilde{\varphi}(gh) \overset{?}{=} \tilde{\varphi}(g)\circ\tilde{\varphi}(h)$$

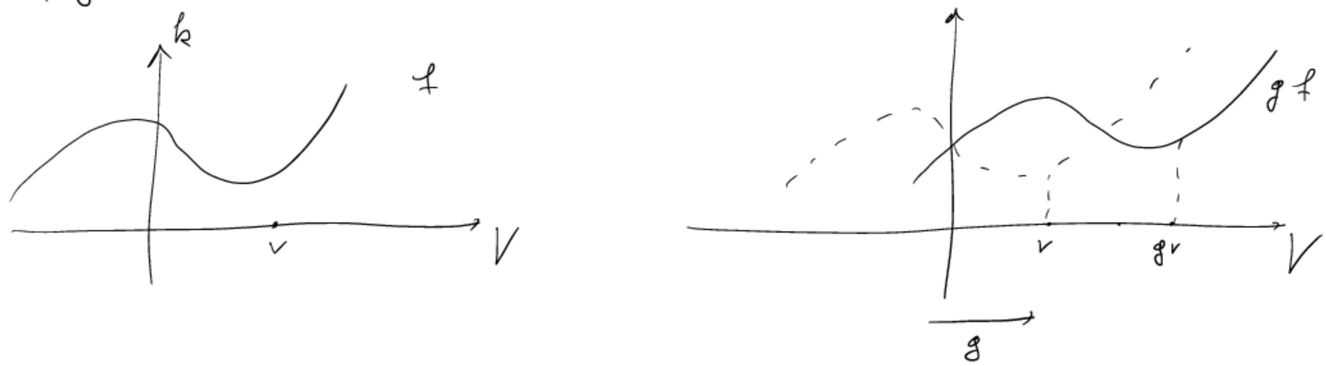
È equival. a dire $(gh)\cdot f \overset{?}{=} g\cdot(h\cdot f)$

Oss.: $\varphi(gh)=\varphi(g)\circ\varphi(h)$ vuol dire $(gh)\cdot v = g\cdot(h\cdot v)$.

Allora:

$$\big((gh)\cdot f\big)(v) = f\big((gh)^{-1}v\big) = f\big(h^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot v)\big)$$

$$\big(g\cdot(h\cdot f)\big)(v) = (h\cdot f)\big(g^{-1}v\big) = f\big(h^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot v)\big)$$ quindi ok



Qual è la formula della f.ne trasformata $g.f$?

In gv deve valere $f(v)$, cioè $(gf)(gv)=f(v)$,

e allora $\boxed{(gf)(v)} = (gf)(g\,\underbrace{g^{-1}v}) = \boxed{f(g^{-1}v)}$.

G-moduli vs. Lie(G)-moduli

Sia $G \leq GL(n,\mathbb{R})$ un sgr chiuso, e $\varphi: G\to GL(V)$ una rappr. continua, con V su $\mathbb{R}$ di dim. finita.

Allora $d\varphi: Lie(G)\longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ è una rappresentazione di $Lie(G)$.

Oss.: Attenzione: non sempre una rappr. $\psi : Lie(G) \to gl(V)$ viene da una rappresentaz. di G (v. fogli settimanali di esercizi).

Esempio: Sia $\varphi : \overset{\subseteq GL(n,\mathbb{R})}{G} \to GL(m, \mathbb{R})$, $g \longmapsto \varphi(g)$ una rappr. continua, poniamo $V = \mathbb{R}^m$ e consid. $\tilde{\varphi} : G \to GL(V^*)$. Presa la base duale $(e_1^*, \ldots, e_m^*)$, abb.

$$(\tilde{\varphi}(g) \cdot e_i^*)(e_j) = e_i^*(\varphi(g)^{-1} e_j) =$$

$$= e_i^* \begin{pmatrix} (\varphi(g)^{-1})_{1j} \\ \vdots \\ (\varphi(g)^{-1})_{mj} \end{pmatrix} = (\varphi(g)^{-1})_{ij}$$

Ora, $\tilde{\varphi}(g) \cdot e_i^*$ è la i-esima colonna di $\tilde{\varphi}(g)$, e calcolarne il valore su e_j estrae l'entrata alla riga j.

Deduciamo $\boxed{\tilde{\varphi}(g) = {}^t\varphi(g)^{-1}}$

Calcoliamo $d\tilde{\varphi}$: $e^{d\tilde{\varphi}(X)} = \tilde{\varphi}(e^X) = {}^t\varphi(e^X)^{-1} =$

$${}^t(\varphi(e^{-X})) = {}^t(e^{-d\varphi(X)}) = e^{-{}^t d\varphi(X)}$$

Poss. assumere $\|X\|$ piccolo, (riscalando X) e concludere $d\tilde{\varphi}(X) = -{}^t(d\varphi(X))$.

Cioè $(d\tilde{\varphi}(X) \cdot e_i^*)(e_j) = -d\varphi(X)_{ij} = e_i^*((-d\varphi(X) \cdot e_j))$

Per linearità, otteniamo $(d\tilde{\varphi}(X) \cdot \eta)(v) = \eta(-d\varphi(X) \cdot v)$.

Def.: Data $\varphi: L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ rappresentaz. di L alg. di Lie (qualsiasi)

anche V^* è in modo naturale un L-modulo, ponendo

$$(X.\eta)(v) = \eta(-X.v) \qquad \forall \eta \in V^*, \ \forall v \in V.$$

Esercizio: Dim. in generale che questo def. una rappr. $\varphi^*: L \to \mathfrak{gl}(V^*)$.

Teorema: Sia $G \leq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso, e $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$

una rappr. continua (V su $\mathbb{R}$ di dim. finita).

Consid. $d\varphi: Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $W \leq V$ sottosp. vett.

1) Se W è un G-sottom., allora è un $Lie(G)$-sottomodulo.

2) Se G è connesso e W è un $Lie(G)$-sottom., allora è un G-sottom..

In particolare, se G è connesso allora:

a) φ è irriduc. $\iff$ $d\varphi$ è irriduc..

b) φ è completam. riduc. $\iff$ $d\varphi$ è completam. riducibile.

CONNESSO

Dim.: 2) Supp. N sia un L-sottomodulo, e sia $g \in G$. Allora

$$g = e^{X_1} \cdots e^{X_k} \qquad \text{per elem. } X_1, \dots, X_k \in Lie(G),$$

e abb. $$\varphi(g) = \varphi(e^{X_1} \cdots e^{X_k}) = \varphi(e^{X_1}) \cdots \varphi(e^{X_k}) =$$

$$= e^{d\varphi(X_1)} \cdots e^{d\varphi(X_k)}.$$

Dato $w \in W$, sappiamo che $d\varphi(X_i).w \in W$, e allora anche $e^{d\varphi(X_k)} \cdot w \in W$, per cui

$$e^{d\varphi(X_1)} \cdot \_ \cdot e^{d\varphi(X_k)} \cdot w = e^{d\varphi(X_1)} \cdot \_ \cdot e^{d\varphi(X_{k-1})} \underbrace{\left(e^{d\varphi(X_k)} \cdot w \right)}_{\in W}$$

e per induzione concludiamo $\varphi(g)\, w \in W$, cioè W è un G-sottomodulo.

1) Viceversa, supp. W un G-sottomodulo, siano $w \in W$ e $X \in Lie(G)$.

Allora

$$d\varphi(X).w = \left(\frac{d}{dt} e^{d\varphi(tX)} \right)\Big|_{t=0} . w =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \varphi\left(e^{tX} \right) \right)\Big|_{t=0} . w = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\varphi(e^{tX}) \cdot w}_{\in W} \right)\Big|_{t=0} \in W. \qquad \square$$

La rappresentazione aggiunta

Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso, e consid.

$$\Gamma : G \longrightarrow GL(M_n(\mathbb{R}))$$
$$g \longmapsto A \mapsto gAg^{-1}$$

Si tratta di una rappresentazione di G.

<u>Lemma</u>: $\mathrm{Lie}(G) \subseteq M_m(\mathbb{R})$ è un G-sottomodulo per Γ.

<u>Dim.</u>: Ovvio se consid. che $\mathrm{Lie}(G) = T_{I_m} G$. Verif. anche con la def. Dati $g \in G$, $X \in \mathrm{Lie}(G)$, calcoliamo

$$e^{t(gXg^{-1})} = g e^{tX} g^{-1} \in G \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

quindi $gXg^{-1} \in \mathrm{Lie}(G)$.

$\square$

<u>Def.</u>: La rappresentazione

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}: G &\longrightarrow GL(\mathrm{Lie}(G)) \\ g &\longmapsto (X \mapsto gXg^{-1}) \end{aligned}$$

si chiama <u>rappresentazione aggiunta</u> di G.

Il suo differenziale si indica con

$$\mathrm{ad}: \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathrm{Lie}(G))$$

e si chiama la <u>rappresentazione aggiunta</u> di L.

Oss.: Data $\varphi: G \to GL(V)$ rappr. continua e $W \subseteq V$ sottomodulo, poss. consid. $\overline{\varphi}: G \to GL(W)$ la „restriz. a W", cioè $\overline{\varphi}(g) = \varphi(g)|_W : W \to W$.

Stessa cosa per $d\varphi: Lie(G) \to \mathfrak{gl}(V)$, e $\overline{d\varphi}: Lie(G) \to \mathfrak{gl}(W)$.

Abbiamo naturalmente $\boxed{d\overline{\varphi} = \overline{d\varphi}}$, per l'unicità della proprietà di $d\overline{\varphi}$.

Quindi ad è la „restrizione" di $d\Gamma$ al sottomodulo $Lie(G)$

Proposizione: $ad(X)(Y) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in Lie(G)$

Dim.: Calcoliamo $ad(X) = dAd(X)$. Sia $Y \in Lie(G) \subseteq M_n(\mathbb{R})$

$$e^{dAd(X)} \cdot Y = Ad(e^X)(Y) = e^X Y e^{-X}.$$

$$dAd(X) = \frac{d}{dt} e^{t\, dAd(X)}\Big|_{t=0} \quad \text{come endom. di } M_n(\mathbb{R})$$

quindi applicato a $Y \in M_n(\mathbb{R})$ viene

$$ad(X)(Y) = dAd(X)(Y) = \left(\frac{d}{dt} e^{t\, dAd(X)}\right)\Big|_{t=0} \cdot Y = \dots$$

Ora, se $\alpha: \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ è C^∞ e $v \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\alpha'(t) \cdot v = \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot v) \qquad (\underline{\text{ESERCIZIO}})$$

Quindi

$$\dots = \frac{d}{dt}\left(e^{t\,dAd(X)}\cdot Y\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\,Y\,e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} = \dots$$

Ora: se $\alpha : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ è C^∞, e $\beta : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ è C^∞,

allora $$\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\cdot\beta(t)\right) = \alpha'(t)\cdot\beta(t) + \alpha(t)\cdot\beta'(t).$$

prodotto fra matrici

ESERCIZIO

Concludiamo

$$\dots = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0}\cdot Y\cdot\left(e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} + \left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0}\cdot Y\cdot\frac{d}{dt}\left(e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= XY - YX. \qquad \square$$

Def.: Sia L algebra di Lie qualsiasi su un campo k.
La rappresentazione aggiunta di L è

$$\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$
$$X \longmapsto \left(Y \mapsto \mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]\right)$$

Esercizio: Questa ad è una rappr. di L.

Lemma: Sia L alg. di Lie qualsiasi$/_k$ e $I \subseteq L$ un sottosp. vett.

I è un ideale $\iff$ I è un ad-sottomodulo.

Dim.: $\forall x \in L \ \forall y \in I : \ [x,y] \in I \iff ad(x)(y) \in I$.

$\square$

Lemma: Sia $H \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso, $g \in GL(n,\mathbb{R})$. Allora

$Lie(gHg^{-1}) = Ad(g)\big(Lie(H)\big)$ dove $Ad: G \to GL(Lie(G))$ è la rappr. aggiunta di qualsiasi $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso contenente H.

Dim.: $Ad(g)(Lie(H)) = g\, Lie(H)\, g^{-1} = \{ gXg^{-1} \mid e^{tX} \in H \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ Y \mid \underbrace{e^{tg^{-1}Yg} \in H}_{} \ \forall t \in \mathbb{R} \}$

equival. a $g^{-1} e^{tY} g \in H$, equival. a $e^{tY} \in gHg^{-1}$. $\square$

Teorema: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ un sgr chiuso, e $H \subseteq G$ un sgr chiuso

H è normale in $G \implies Lie(H)$ è un ideale di $Lie(G)$.

Se inoltre G e H sono connessi vale anche il viceversa, cioè

G, H connessi e $Lie(H)$ ideale di $Lie(G) \implies H$ è normale in G.

Dim.: 1) H normale in $G \implies \overbrace{Ad(g) \cdot Lie(H)}^{Lie(gHg^{-1})} = Lie(H) \ \forall g \in G \implies$

$Lie(H) \subseteq Lie(G)$ è un G-sottomodulo per Ad

$\implies$ è un $Lie(G)$-sottom. per ad.

2) Qui G e H sono connessi. Abb.:

$\mathrm{Lie}(H)$ ideale $\Rightarrow$ è $\mathrm{Lie}(G)$-sottomodulo per ad $\overset{(G \text{ connesso})}{\Longrightarrow}$ è G-sottomodulo per Ad: $\mathrm{Lie}(gHg^{-1}) = \mathrm{Lie}(H)$ $\forall g \in G$. Visto che H è connesso deduciamo $gHg^{-1} = H$ $\forall g \in G$.

$\square$

Def.: Sia A un'algebra non nec. associativa su un campo (con appl. bilineare $\beta: A \times A \longrightarrow A$). Una <u>derivazione</u> di A è un'appl. lineare $\delta: A \longrightarrow A$ tale che
$$\delta(\beta(v,w)) = \beta(\delta(v), w) + \beta(v, \delta(w)) \quad \forall v, w \in A$$

<u>Teorema</u>: 1) Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ chiuso e $g \in G$. $\mathrm{Ad}(g): \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ è un automorfismo di algebre di Lie.

2) Sia L un'alg. di Lie qualunque su k campo, e $X \in L$
$\mathrm{ad}(X): L \longrightarrow L$ è una <u>derivazione</u> dell'algebra L.

Dim.: 1) $g[X,Y]g^{-1} = gXYg^{-1} - gYXg^{-1} = [gXg^{-1}, gYg^{-1}]$.

2) $\mathrm{ad}(X)([Y,Z]) = [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] =$

$= [Y,[X,Z]] + [[X,Y],Z] = [\mathrm{ad}(X)(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)(Z)]$.

$\square$

<u>Oss.</u>: Nel caso particolare $L = \mathfrak{gl}(n)$, dato $X \in \mathfrak{gl}(n)$ l'applicazione

$ad(X): \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}(n)$ è anche una derivazione di $\mathfrak{gl}(n)$ come alg. associativa (col prodotto usuale): $ad(X)(YZ) = [X, YZ] = \underbrace{XYZ - YZX}$

$ad(X)(Y) \cdot Z + Y \cdot ad(X)Z = XYZ - \cancel{YXZ} + \cancel{YXZ} - YZX =$

Definizione: Siano V, W due G-moduli (sullo stesso campo k), dove G è un gruppo. Un omomorfismo di G-moduli è un'appl. lineare $f: V \to W$ tale che

$$\underset{\text{in } W}{g \cdot} f(v) = f(\underset{\text{in } V}{g \cdot v}) \quad \forall g \in G, \ \forall v \in W.$$

In tal caso f si dice isomorfismo di G-moduli se f è anche biiettiva (e allora f^{-1} è anche isom.)

Analogam. si definiscono omomorfismi di L-moduli dove L è un'alg. di Lie.

ALGEBRE DI LIE

D'ora in poi: k = campo qualunque, ogni sp. vett. è su k, di dimensione finita (se non altrimenti specificato).

Def.: Sia L algebra di Lie.

1) Il centro $Z(L)$ è def. come il nucleo di ad, cioè

$$Z(L) = \{ z \in L \mid [z,y] = 0 \quad \forall y \in L \}$$

2) L'algebra derivata di L è

$$[L,L] = \mathrm{Span}\{ [x,y] \mid x,y \in L \}$$

3) Dati due ideali I, J, il loro bracket è def. come

$$[I,J] = \mathrm{Span}\{ [x,y] \mid x \in I,\ y \in J \}$$

Oss.: 1) $Z(L)$ è un ideale, infatti dati $z \in Z(L)$ e $x \in L$, abb $[z,x] = 0 \in Z(L)$.

2) Anche $[L,L]$ è un ideale, infatti dati $x,y \in L$ e $z \in L$, abb. $\big[[x,y], z\big] \in [L,L]$ ovviamente, e lo stesso vale se invece di $[x,y]$ mettiamo una comb. lin. di bracket di elt diversi.

3) Dati due ideali I, J, abb.:

a) $I+J$ è un ideale, perché $[\underbrace{x}_{\in L}, \overset{\in I}{y} + \underset{\in J}{z}] = \overbrace{[x,y]}^{\in I} + \overbrace{[x,z]}^{\in J}$

b) $I \cap J$ è un ideale

c) $[I,J]$ è un ideale, perché $[x,[y,z]] = \overbrace{[\underbrace{[x,y]}_{\in I}, z]}^{\in I} + \overbrace{[y, \underbrace{[x,z]}_{\in J}]}^{\in J}$.
(contenuto in $I \cap J$)

4) ATTENZIONE: se $K \subseteq L$ è sottoalg. di Lie opp. ideale, e $J \subseteq K$ è ideale <u>di K</u>, non è detto che J sia ideale <u>di L</u>.

<u>Esempi</u>: 1) $Z(\mathfrak{gl}(n)) = k \cdot I_n$ (esercizio importante!!)

2) $[\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)] = \mathfrak{sl}(2)$ se $\mathrm{char}(k) \neq 2$, infatti

prendiamo la base $\left(e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

di $\mathfrak{sl}(2)$ (talvolta si usano le lettere x, h, y) e oss.:

$$[h,e] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2e$$

per cui $e = \frac{1}{2}[h,e] \in [\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)]$

$h = [e,f]$, $\quad [h,f] = -2f$ quindi $f = \frac{1}{2}[f,h]$.

3) $[\mathfrak{b}(n), \mathfrak{b}(n)] = \mathfrak{b}^u(n)$

<u>Dim</u>: <u>$\subseteq$</u>) $\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$

quindi il bracket ha 0 sulla diag..

$\supseteq$ **Esercizio**: prendere una base di $\mathfrak{b}^u(n)$ e scrivere ogni elt come bracket di altri elem..

Def.: Sia L alg. di Lie. Se L non è abeliana, e i suoi unici ideali sono $\{0\}, L$, allora L si dice *semplice*.

Esempio: Se $\mathrm{char}(k) \neq 2$, allora $L = \mathfrak{sl}(2)$ è semplice.

Infatti sia $I \subseteq L$ ideale, supp. $I \neq \{0\}$.

Oss.: se $e \in I$ allora $[e,f] = h \in I$ e $f = \frac{1}{2}[f,h] \in I$

se $h \in I$ allora $e = \frac{1}{2}[h,e] \in I$

se $f \in I$ allora $h = [e,f] \in I$

Quindi $\boxed{\text{se } e, f \text{ opp. } h \in I \text{ allora } I = L.}$

Sia ora

$$0 \neq x = \alpha e + \beta h + \gamma f \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in k.$$

$$\left.\begin{aligned} [e,x] &= -2\beta e + \gamma h, & [e,[e,x]] &= -2\gamma e \\ [f,x] &= -\alpha h + 2\beta f, & [f,[f,x]] &= -2\alpha f \end{aligned}\right\} \text{ sono tutti elem. di } I$$

Se $\gamma \neq 0$ allora $e \in I$ e $I = L$

Se $\alpha \neq 0$ allora $f \in I$ e $I = L$

Rimane il caso $\gamma = \alpha = 0$, $\beta \neq 0$ ma allora $h \in I$ e $I = L$.

Def.: Se I è un ideale di L alg. di Lie, il quoziente

$$L/_I = \{ x+I \mid x \in L \}$$

(come gruppi additivi) ha una struttura naturale di spazio vettoriale

ponendo $(x+I)+(y+I) = x+y+I$, $\lambda(x+I) = \lambda x + I$,

e di algebra di Lie,

ponendo $[x+I, y+I] = [x,y] + I$

Oss.: Il bracket su $L/_I$ è ben def., perché se $z \in I$ allora

$$x+z+I = x+I \quad \text{e abb.:}$$

$$[x+z+I, y+I] = [x+z, y]+I = [x,y] + \underbrace{[z,y]}_{\in I} + I = [x,y]+I$$

e stessa cosa per $[x+I, y+z+I]$.

Anche la str. di sp. vett. è ben def., con verifica simile.

Esercizio: Verificare che $L/_I$ soddisfa gli assiomi di sp. vett. e di algebra di Lie.

Def.: Dato $V \subseteq L$ sottosp. vett. di un'alg. di Lie L, definiamo il

normalizzatore $N_L(V) = \{ x \in L \mid [x,v] \in V \ \forall v \in V \}$ e il

centralizzatore $Z_L(V) = \{ x \in L \mid [x,v] = 0 \ \forall v \in V \}$ di V in L.

Ideali e omomorfismi

Prop.: 1) Se $\varphi: L \to M$ è un omom. di alg. di Lie, $\ker(\varphi)$ è un ideale di L.

2) Dato $I \subseteq L$ ideale, allora $I = \ker(\pi)$ dove $\pi: L \to L/I$, $x \mapsto x+I$.

3) Dato $I \subseteq L$ ideale e $\varphi: L \to M$ omomorfismo, allora $I \subseteq \ker(\varphi) \iff$ esiste $\psi: L/I \to M$ tale che

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & M \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $\varphi = \psi \circ \pi$.

4) $(L/I)/(J/I) \cong L/J$ tramite $(x+I) + \frac{J}{I} \longmapsto x + J$ $(x \in L)$ $(I \subseteq J \subseteq L$ entrambi ideali di $L)$

5) Dato I ideale di L, c'è una biiezione fra $\{J$ ideale di L contenente $I\}$ e $\{$ideali di $L/I\}$ data da $J \mapsto J/I$. Vale lo stesso per sottoalgebre di Lie contenenti l'ideale I, e sottoalgebre di Lie di L/I.

Dim.: Esercizio.

Algebre di Lie risolubili e nilpotenti

Sia L un'alg. di Lie su un campo k.

Def.: La serie derivata di L è

$$L^{(0)} = L$$
$$L^{(1)} = [L, L]$$
$$L^{(2)} = [[L,L], [L,L]]$$
$$\vdots$$
$$L^{(m)} = [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}] \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

(ovviam. $L^{(m)} \subseteq L^{(m-1)}$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, per induzione)

La <u>serie centrale discendente</u> è

$L^0 = L$

$L^1 = [L, L]$

$L^2 = [L, [L, L]]$ (ovviam. $L^m \subseteq L^{m-1}$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, per induzione)

$\vdots$

$L^m = [L, L^{m-1}]$ $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

<u>Lemma:</u> 1) $L^{(m)} \subseteq L^m$

2) $L^{(m)}$ ed L^m sono ideali di L

$\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

<u>Dim.:</u> 1) è ovvio

2) a) <u>$L^{(m)}$ per induz.</u>: segue da I, J ideali $\Rightarrow [I, J]$ ideale. Verifica diretta:

se $y \in L^{(m)}$ e $x \in L$, abb.

$y = \sum_i [y_i, z_i]$, $y_i, z_i \in L^{(m-1)}$

$$[x, y] = \sum_i [x, [y_i, z_i]] = \sum_i \Big([\underbrace{[x, y_i]}_{\substack{\in L^{(m-1)} \\ \text{per induz.}}}, \underset{L^{(m-1)}}{z_i}] + [\underset{L^{(m-1)}}{y_i}, \underbrace{[x, z_i]}_{\in L^{(m-1)} \text{ per induzione}}] \Big) \in [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}] = L^{(m)}$$

b) se $y \in L^m$ e $x \in L$ abb. $[x, y] \in [L, L^m] = L^{m+1} \subseteq L^m$.

$\square$

<u>Oss.:</u> Se $\varphi: L \to M$ è un omom., allora $\varphi(L^{(m)}) \subseteq M^{(m)}$ e $\varphi(L^m) \subseteq M^m$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Def.: L si dice <u>risolubile</u> se $\exists m \mid L^{(m)} = \{0\}$,

L si dice <u>nilpotente</u> se $\exists m \mid L^{m} = \{0\}$.

Oss.: L commutativa $\Rightarrow L$ nilpotente $\Rightarrow L$ risolubile.

Esempi: 1) $\mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{sl}(2)^1 = \mathfrak{sl}(2)^{(1)} \neq \{0\}$ se $\mathrm{char}(k) \neq 2$, quindi $\mathfrak{sl}(2)$ non è risolubile né nilpotente.

2) $\mathfrak{b}^u(n)$ è nilpotente, infatti siano

$$e_{ij} = \begin{array}{cl} \quad\quad\quad \text{colonna } j & \\ \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{riga } i \\ & (j > i) \end{array}$$

allora
$$e_{ij} \cdot e_{st} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq s \\ e_{it} & \text{se } j = s \end{cases}$$

per cui
$$[\underset{\mathfrak{b}^u}{\underset{\Uparrow}{e_{ij}}}, \underset{\mathfrak{b}^u}{\underset{\Uparrow}{e_{st}}}] = \begin{cases} e_{it} & \text{se } j = s \ (\text{perché allora } i < j = s < t) \\ -e_{sj} & \text{se } i = t \ (\text{allora } s < t = i < j) \end{cases}$$

Interpretiamo $d = j - i$ come la „distanza" dell'1 dalla diagonale:

$$\begin{pmatrix} 0 & d=1 & d=2 & d=3 & \\ & 0 & d=1 & d=2 & \\ & & 0 & d=1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo poi che nel primo caso $t - i = t - s + j - i > \max\{t-s, j-i\}$

e nel secondo caso $j - s = j - i + t - s > \max\{j-i, t-s\}$

Definiamo: $\mathrm{val}(x) = \begin{cases} \min\{d = j-i \text{ per tutte le entrate } x_{ij} \neq 0 \text{ di } x\} & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$

allora $\forall x \in \mathfrak{b}^u(n)$: $\mathrm{val}(x) \geq 1$

$\forall x \in [\mathfrak{b}^u(n), \mathfrak{b}^u(n)]$: $\mathrm{val}(x) \geq 2$

e per induzione: $\forall x \in \mathfrak{b}^u(n)^m$: $\mathrm{val}(x) \geq m+1$

Allora $\mathfrak{b}^u(n)^{n-1} = \{0\}$, perché se $x \in \mathfrak{gl}(n)$ soddisfa $\mathrm{val}(x) \geq n$ allora $x = 0$.

3) $\mathfrak{b}(n)$ è risolubile, perché $\mathfrak{b}(n)^{(1)} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)$, per cui

$$\mathfrak{b}(n)^{(2)} = [\mathfrak{b}(n)^{(1)}, \mathfrak{b}(n)^{(1)}] \subseteq [\mathfrak{b}^u(n), \mathfrak{b}^u(n)] = \mathfrak{b}^u(n)^{(1)} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)^1$$

e per induzione $\mathfrak{b}(n)^{(m)} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)^{m-1}$ $\forall m \geq 1$.

4) $\mathfrak{b}(n)$ non è nilpotente, perché $[\mathfrak{h}(n), \mathfrak{b}^u(n)] = \mathfrak{b}^u(n)$ (esercizio).

Proposizione: 1) Se L è risolubile, lo sono tutti i suoi quozienti e tutte le sue sottoalgebre.

2) Se I è un ideale risolubile e L/I è risolubile, allora L è risolubile.

3) Se I e J sono ideali risolubili, è risolubile anche $I+J$.

Dim.: 1) $K \subseteq L$ sottoalgebra $\Rightarrow$ $K^{(m)} \subseteq L^{(m)}$ $\forall m \geq 0$

$I \subseteq L$ ideale $\Rightarrow$ $\left(L/I\right)^{(m)} = \pi(L^{(m)})$ $\forall m \geq 0$

$(\pi: L \to L/I)$

2) L/I risolubile $\Rightarrow \exists m_0 \mid (L/I)^{(m_0)} = \{0 + I\}$

$\Rightarrow L^{(m_0)} \subseteq I$, e oss. $L^{(m_0+s)} \subseteq I^{(s)}$ per cui se

anche I è risolubile segue L risolubile.

3) $$\frac{I+J}{I} \cong \underbrace{\frac{J}{I\cap J}}_{\text{risol. per 1)}} \underset{\text{per 2)}}{\Longrightarrow} I+J \text{ risolubile}$$ □

Esercizio: 1) Il 2) non vale per la nilpotenza, ad es. $b^u(n)$ è ideale nilpot. di $b(n)$, e $\frac{b(n)}{b^u(n)} \cong h(n)$ è abeliana $\Rightarrow$ nil pot., ma $b(n)$ non è nilpotente.

2) Il 3) vale anche per la nilpotenza, dimostrarlo.

$$\left((I+J)^n = \sum_{I_j \in \{I,J\}} [I_1,[I_2,[\dots[I_{n-1}, I_n]\dots], \text{ e vale} \right.$$

$$\left. \dim [I,V] < \dim V \quad \forall V \text{ ssp. di } I, \text{ analog. con } J \right)$$

Sia L alg. di Lie.

Corollario: Esiste un unico ideale risolubile massimale di L.

Dim.: Basta prendere la somma di tutti gli ideali risolubili. □

Def.: 1) L'ideale risolubile massimale si chiama <u>radicale</u> di L: $Rad(L)$.

2) Se $Rad(L) = \{0\}$ allora L si dice <u>semisemplice</u>.

Esercizio: $\forall L$: $L/Rad(L)$ è semisemplice.

Proposizione: 1) Se L è nilpotente, sottoalgebre e quozienti sono nilpotenti.

2) Se $L/_I$ è nilpot. e $I \subseteq Z(L)$ allora L è nilpot.

3) Se $L \overset{\neq \{0\}}{}$ è nilpot. allora $Z(L) \neq \{0\}$.

Dim.: 1) $L^m \supseteq K^m$, $\left(L/_I\right)^m = \pi(L^m)$ $\quad (\pi: L \to L/_I)$

2) Sia m con $L/_I{}^m = \{0+I\}$, cioè $\pi(L^m) \subseteq \ker(\pi)$, cioè $L^m \subseteq I$. Ora $[L, L^m] \subseteq [L, I] \subseteq [L, Z(L)] = \{0\}$

3) Sia $L^m = \{0\}$ ma $L^{m-1} \neq \{0\}$, allora $[L, L^{m-1}] = \{0\}$ quindi $L^{m-1} \subseteq Z(L)$.

$\square$

Oss.: 1) la parte 3) non vale per la risolubilità, ad es. $L = b(n) \cap sl(n)$ ha centro banale (esercizio: verificarlo almeno per $n=2$).

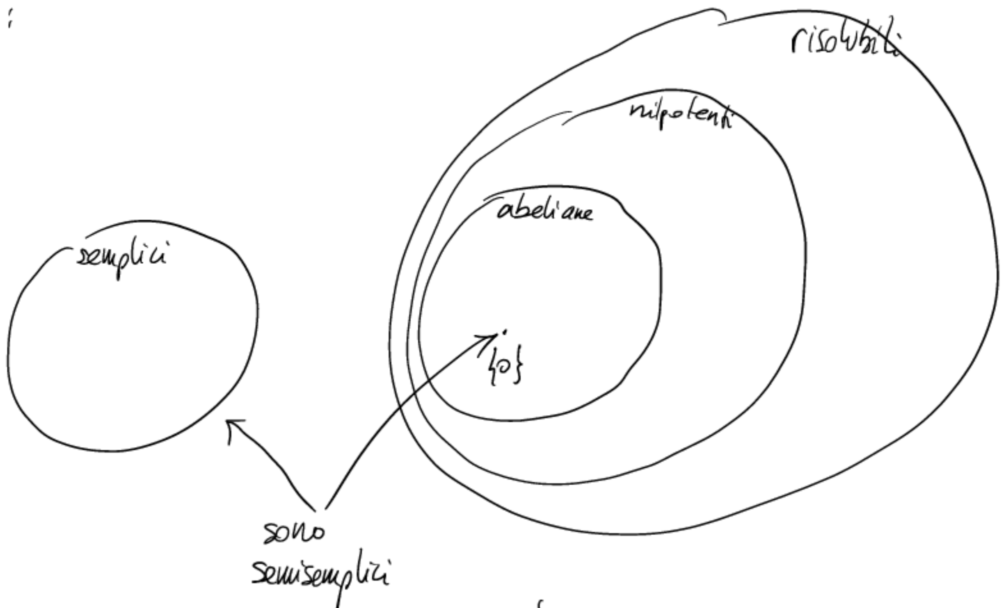
2) Se L è semplice non è risolubile, perché $[L,L]$ è un ideale di L. Infatti se L è semplice allora $[L,L] \neq \{0\}$ altrimenti L sarebbe abeliana, ma allora $[L,L] = L$ da cui $L^{(m)} = L$ $\forall m \geq 1$, segue L non risolubile.

3) Se L è risolubile allora $L = Rad(L)$.

4) Se L è semisemplice può essere $= \{0\}$. Se L è semisemplice $\neq \{0\}$, allora $L \supsetneq Rad(L)$, quindi L non è risolubile.

5) Se L è semplice allora $Rad(L) = \begin{cases} L \\ \{0\} \end{cases}$ ~~opp.~~ perché $Rad(L)$ è un ideale. Ma sappiamo già L non risolubile, quindi $Rad(L) = \{0\}$, cioè L è semisemplice.

Quindi:



(ci sono anche _altre_ algebre semisemplici)

<u>Criteri di nilpotenza</u> (teo. Engel), <u>risolubilità</u> (criterio di Cartan), <u>semisemplicità</u>.

$\boxed{\text{NILPOTENZA}}$

<u>Def.</u>: Un elem. x di un'algebra di Lie L si dice <u>ad-nilpotente</u> se $ad(x) \in \mathfrak{gl}(L)$ è un endomorfismo nilpotente di L.

Es.: $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in sl(2)$:

$$[e,e]=0$$
$$[e,h] = -2e \Rightarrow [e,[e,h]] = 0$$
$$[e,f] = h \Rightarrow [e,[e,[e,f]]] = 0,$$

da cui $ad(e)^3 = 0$.

Teorema (Engel): Sia L alg. di Lie. Se $\forall x \in L$: x è ad-nilpotente, allora L è nilpotente.

Oss.: Confrontiamo la nilpotenza con la condiz. del teorema:

$\boxed{\text{Nilp.}}$ $\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \forall x_1, \dots, x_{m+1} \in L : [x_1, [x_2, \dots, [x_m, x_{m+1}] \cdots]] = 0$

$\boxed{\text{condiz. del teo.}}$ $\forall x \in L \; \exists \underset{\uparrow \text{può dip. da } x}{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \forall y \in L : [\underbrace{x, [x, \dots, [x}_{m}, y] \dots]] = 0$ ← sembra molto più debole!!

Per la dim.: servono un lemma e un teo. ausiliari.

Lemma: Sia V sp. vett. e $x \in gl(V)$. Se x è nilpot. allora x è anche ad-nilpotente.

Dim. lemma: Consid. $\lambda_x : gl(V) \to gl(V)$, $y \mapsto xy$ e $\rho_x : gl(V) \to gl(V)$, $y \mapsto yx$.

Allora λ_x e ρ_x commutano e $ad(x) = \lambda_x - \rho_x$.

Segue: $$ad(x)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \lambda_x^j (-\rho_x)^{m-j}.$$

D'altronde $\lambda_x^j(y) = x^j y$, e simil. per ρ_x, quindi se $m \geq 2N$ con $x^N = 0$ allora $ad(x)^m = 0$. $\square$

Oss.: Applichiamo il ragionamento visto nella dim. al caso seguente.

Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ un'algebra di Lie, $M \subseteq L$ una sottoalgebra di Lie. Allora M agisce „tramite ad" non solo su M stessa:

$$\begin{aligned} ad: M &\longrightarrow \mathfrak{gl}(M) \\ y &\longmapsto [y,-]: x \longmapsto [y,x] \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

ma anche su tutta L. Cioè è def. la rappresentaz.

$$\begin{aligned} \psi: M &\longrightarrow \mathfrak{gl}(L) \\ y &\longmapsto \big([y,-]: x \longmapsto [y,x] \quad \forall x \in L\big) \end{aligned}$$

Non solo! Visto che $[y,M] \subseteq M$, quest'ultima rappresentazione „passa al quoziente" L/M, cioè induce la rappresentazione

$$\begin{aligned} \varphi: M &\longrightarrow \mathfrak{gl}(L/M) \\ y &\longmapsto \big(x+M \longmapsto [y,x]+M\big) \end{aligned}$$

Infine, vale: se $x \in M$ è nilpotente, anche $\psi(x)$ è nilpotente (dim. come nel lemma) e allora anche $\varphi(x)$ è nilpotente (ovvio).

Teorema (1° teo. di „punto fisso"): Sia $V \neq \{0\}$ sp. vett. e $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ sottoalgebra di Lie. Se ogni elt di L è nilpotente, allora $\exists v_0 \in V \setminus \{0\} \mid x.v_0 = 0 \quad \forall x \in L$.

Dim.: Per induzione su $\dim(L)$.

Base: $\dim(L) = 0$; allora $L = \{0\}$ e il teo. è ovvio.

Esercizio: dim. il caso $\dim(L) = 1$.

Passo induttivo: Sia $L \neq \{0\}$, allora L ha sottoalgebre di Lie proprie ($\subsetneq L$), ad es. $\{0\} \subsetneq L$. Sia $M \subsetneq L$ sottoalgebra propria massimale.

1) Dim. che $\dim(M) \overset{(?)}{=} \dim(L) - 1$. Consid. $y \in M$, $z \in M$: $[y,z] \in M$, cioè $ad(y)(M) \subseteq M$. Segue che $ad(y): L \to L$, $x \mapsto [y,x]$ passa al quoziente

$$L/M \to L/M$$
$$x + M \mapsto [y,x] + M$$

e questo def. una rappresentazione

$$\varphi: M \to \mathfrak{gl}(L/M) \quad (\neq \{0\})$$
$$y \longmapsto \big(x + K \mapsto [y,x] + M\big)$$

Per l'osservaz. prec.: $\varphi(K)$ è fatto da elem. nilpotenti.

Abb.: $\dim(\varphi(M)) \leq \dim(M) < L$, quindi usiamo l'induz. e concludiamo $\exists x_0 + M \in L/M \mid \forall y \in M$: $\underbrace{\varphi(y)(x_0 + M)}_{= [y,x_0] + M} = 0 + M$, $x_0 + M \neq 0 + M$.

cioè $\underbrace{[y, x_0] \in M}_{\forall y \in M}$ ma $x_0 \notin M$.

Segue: $M \oplus \Bbbk x_0$ è una sottoalgebra di L, da cui $M \oplus \Bbbk x_0 = L$.

Allora $[\underbrace{\overset{M}{y} + \overset{\Bbbk}{a} x_0}_{\in L}, \underset{M}{\overset{\cap}{z}}] = \underbrace{[y, z]}_{\overset{\cap}{M}} + a \underbrace{[x_0, z]}_{\overset{\shortparallel}{0}} \in M$, cioè M è un ideale di L.

2) Conclusione della dim. Per induzione, visto che $\dim(M) < \dim(L)$, abb.

$$W = \{w \in V \mid M.w = \{0\}\} \text{ è } \neq \{0\}.$$

Inoltre W è L-stabile, infatti dato $x \in L$ e $w \in W$, abb.

$$y.x.w = x.\underbrace{y.w}_{0} - \underbrace{[x, y]}_{\in M}.w = 0 - 0 = 0 \quad \forall y \in M,$$ cioè

$x.w \in W \quad \forall x \in L$.

Infine: $x_0|_W : W \longrightarrow W$ è nilpotente, quindi ha nucleo $\neq \{0\}$:

$$\exists v_0 \in W \setminus \{0\} \mid x_0 v_0 = 0.$$

Segue: $(y + a x_0).v_0 = y v_0 + a x_0 v_0 = 0$, cioè v_0 è il vett. cercato.

$\square$

Corollario: Nelle ip. del teorema di „punto fisso", c'è una base di V tale che $L \,(\in gl(V) \cong gl(n))$ è cont. in $b^u(n)$. In particolare c'è una bandiera di sotto-spazi $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = V$ con $\dim V_i = i$ e V_i L-sottomodulo $\forall i$.

Dim. corollario: Iniziamo ponendo $V_1 = kv_0$, e
$\uparrow$ dal teorema

completiamo v_0 ad una base. Allora in quella base $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ le matrici $x \in L$ assumono la forma

$$x = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\tilde{x}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Le sottomatrici $\tilde{x}$, al variare di $x \in L$, formano una sottoalg. di Lie $\tilde{L} \subseteq \mathfrak{gl}(n-1)$.

Per induz., possiamo cambiare la base $(v_1, \dots, v_{n-1})$ in modo che $\tilde{L} \subseteq \mathfrak{b}^u(n-1)$, cosicché $L \subseteq \mathfrak{b}^u(n)$. Infine, basta porre $V_i := \mathrm{Span}\{v_0, \dots, v_{i-1}\}$. $\square$

Dim. Teo. di Engel Poss. supporre $L \neq \{0\}$, procediamo per induz. su $\dim(L)$.

Per il lemma, $ad(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ è fatta di elem. nilpotenti.

Per il teo. di "punto fisso": $\exists\, x_0 \in L \setminus \{0\} \mid x_0$ è annullato da ogni elem. di $ad(L)$, cioè $Z(L) \neq \{0\}$.

Consid. $L/Z(L)$: è fatta di elem. ad-nilpotenti (esercizio: verificarlo), per induzione è nilpotente. Segue: L nilpotente. $\square$

Attenzione: $\boxed{\text{D'ora in poi } k = \overline{k}, \quad \operatorname{char}(k) = 0.}$

$\boxed{\text{RISOLUBILITA'}}$

Teorema ("di pto fisso" n. 2): Sia V sp. vett., $L \in gl(V)$ sottoalg. risolubile.

Se $V \neq \{0\}$ allora esiste un autovett. comune a tutti gli elt di L.

Dim.: Induzione su $\dim(L)$: se $L = \{0\}$ è ovvio. Supp. $L \neq \{0\}$.

1) Troviamo M come prima. Sappiamo $[L,L] \subsetneq L \neq \{0\}$, inoltre

ogni sottosp. vett. di L contenente $[L,L]$ è un ideale! (esercizio)

Scegliamo M sottosp. vett. di L contenente $[L,L]$ e di

codim. 1 in L. Allora M è un ideale, e poss.

scrivere $L = M + k x_0$ con $x_0 \in L \setminus M$.

2) Autovett. simultaneo per M: per induzione, $\exists u \in V \setminus \{0\} \mid y.u = \lambda(y).u$

$\forall y \in M$, dove $\lambda(y) \in k$. Consid.

$$W = \{ w \in V \mid y.w = \lambda(y).w \ \forall y \in M \} \quad (\ni u)$$

3) Dim. che $L.W \overset{(?)}{\subseteq} W$, cioè W è un L-sottomodulo.

Sicuramente $M.W \subseteq W$, consid. x_0. Dati $w \in W$ e $y \in M$, abb.

$$y.x_0.w = \underbrace{x_0.y.w}_{\substack{\shortparallel \\ \lambda(y).x_0 w}} - \underbrace{[x_0, y]\, w}_{\overset{?}{=} 0}$$

Ora: $[x_0, y] \in M$, quindi $[x_0, y] w = \lambda([x_0, y]) w$, e dobb. dim. che λ è zero sui commutatori. Lo vediamo dimostrando che λ essenzialm. è una „traccia".

Sia $w \in W \setminus \{0\}$ e consid. $w, x_0 w, x_0^2 w, \dots,$ e poniamo

$W_0 = \{0\}$, $W_1 = \mathrm{Span}\{w\}, \dots, W_i = \mathrm{Span}\{w, x_0 w, \dots, x_0^{i-1} w\}, \dots, W_m$

dove W_m è l'ultimo in cui quei vettori sono lin. indipendenti. Oss $x_0 W_{i-1} \subseteq W_i$ $\forall i > 0$.

Dimostriamo per induzione su i che $\forall y \in M$: $y x_0^i w = \lambda(y) x_0^i w + (\text{vett. in } W_i)$.

Da questo segue in particolare che $y W_i \subseteq W_i$ $\forall i \geq 0$. I casi $i = 0$, $i = 1$ sono ovvi, sia allora $i > 1$ e calcoliamo:

$$y x_0^i w = x_0 y x_0^{i-1} w + \underbrace{[y, x_0]}_{\in M} x_0^{i-1} w \underset{\text{induz.}}{=} x_0 \left(\lambda(y) x_0^{i-1} w + \text{vett. in } W_{i-1}\right) + (\text{vett. in } W_i) =$$

$$= \lambda(y) x_0^i w + \underbrace{x_0 (\text{vett. in } W_{i-1})}_{\in W_i} + (\text{vett. in } W_i) = \lambda(y) x_0^i w + (\text{vett. in } W_i).$$

Calcoliamo la matrice di $y|_{W_i}$ rispetto alla base $(w, x_0 w, \dots, x_0^{i-1} w)$ per $i \leq m$:

$$\left.\begin{pmatrix} \lambda(y) & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda(y) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda(y) \end{pmatrix}\right\} i$$

cioè $m \cdot \lambda(y) = \mathrm{tr}(y|_{W_m})$.

Riassumiamo: W_m è stabile per M e per x_0, e dato $y \in M$ abb. $m \cdot \lambda(y) = \mathrm{tr}(y|_{W_m})$. Questo si applica anche a $[y, x_0]$:

$$n\cdot\lambda([y,x_0]) = tr\left([y,x_0]\big|_{W_n}\right) = tr\left([y|_{W_n}, x_0|_{W_n}]\right)$$

ha senso perchè $x_0 W_n \subseteq W_n$ e $y W_n \subseteq W_n$

ma la traccia di un commutatore è nulla, quindi $n\cdot\lambda([y,x_0])=0$.

Visto che $char(k)=0$, segue $\lambda([y,x_0])=0$, da cui

$$y x_0 w = \lambda(y) x_0 w$$

cioè $x_0 W \subseteq W$, e allora $L W \subseteq W$.

4) Fine della dim. Visto che $k=\bar{k}$, x_0 ha un autovettore $v \neq 0$ in W, che è fatto da autovettori simultanei per M. Segue che v è autovettore per tutti gli elem. di L.

$\square$

<u>Corollario</u> (Teorema di Lie): Sia $L \subseteq gl(V)$ risolubile. Esiste una base di V tale che $L \subseteq b(n)$, identificando $gl(V)$ con $gl(n)$.

<u>Dim.</u>: Per induzione su $\dim(V)$, per il 2° teo. di pto fisso ogni $x \in L$ ha matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(x) & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\quad * \quad} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

rispetto a una base $(v_1, \dots, v_n)$ dove v_1 è autovett. simultaneo per L. $\square$

<u>Attenzione</u>: Dal teorema di Engel (o dagli altri risultati visti) <u>non</u> deriva la seguente affermazione: se $L \subseteq gl(V)$ è un'alg. di Lie nilpotente, allora
- x è nilpotente $\forall x \in L$
- esiste una base t.c. $L \subseteq b^u(n)$.

entrambe <u>false</u> in generale!

Corollario: Sia L alg. di Lie. L è risolubile $\iff [L,L]$ è nilpotente.

Dim.: $\Rightarrow$) Supp. L risolubile. Sia $x_1, \dots, x_n$ base di L in cui $ad(L)$ è fatta da matr. triang. sup.. Allora $ad(L) \subseteq \mathfrak{b}(n)$, $\underbrace{[ad(L), ad(L)]}_{= ad([L,L])} \subseteq \mathfrak{b}^u(n)$,

quindi $$ad([L,L]) \cong \frac{[L,L] + \ker(ad)}{\underbrace{\ker(ad)}_{= Z(L)}} \cong \frac{[L,L]}{\underbrace{[L,L] \cap Z(L)}}$$ è nilpotente,

$\uparrow$ contenuto in $Z([L,L])$

segue $[L,L]$ nilpotente.

$\Leftarrow$) Se $[L,L]$ è nilpotente allora è risolubile, e $\frac{L}{[L,L]}$ è abeliana, quindi L è risolubile. $\square$

Oss.: il criterio di Cartan (di risolubilità) si basa sulla seguente osservazione: data $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ risolubile, allora in una qualche base di V vale $L \subseteq \mathfrak{b}(n) (\subseteq \mathfrak{gl}(n) \cong \mathfrak{gl}(V))$, e vale $[L,L] \subseteq [\mathfrak{b}(n), \mathfrak{b}(n)] = \mathfrak{b}^u(n)$. Da questo segue: $\forall x \in L\ \forall y \in [L,L]$: $\boxed{xy \in \mathfrak{b}^u(n)}$.

Attenzione: il prodotto xy è in $\mathfrak{b}^u(n)$ ma <u>non è detto</u> che sia in L. L'idea è quella di osservare che ovviamente

$$tr(xy) = 0 \qquad (\forall x \in L, \forall y \in [L,L]) \qquad (*)$$

Questa condizione sembra una conseguenza banale della risolubilità e anche „debole", tuttavia il criterio di Cartan dirà che $(*)$ è <u>equivalente</u> alla risolubilità di L.

Per dimostrare che $(*) \Rightarrow L$ risolubile dimostreremo che $(*) \Rightarrow [L,L]$ nilpotente usando il teo. di Engel.

Per dimostrare che tutti gli elem. di $[L,L]$ sono nilpotenti useremo la decomposizione di Jordan-Chevalley, che vediamo in una parentesi di algebra lineare.

$\boxed{\text{PARENTESI DI ALGEBRA LINEARE}}$

Sia V sp. vett. di dim. finita su k. (Ricordiamo: $k=\bar{k}$.)

<u>Def</u>: $v \in V \setminus \{0\}$ è <u>autovettore generalizzato</u> di autovalore $\alpha \in k$ per $T: V \to V$ lineare se $\exists m \geq 1 \mid (T-\alpha)^m \cdot v = 0$.

Definiamo anche l'<u>autospazio generalizzato</u> relativo ad $\alpha \in k$ qualsiasi:

$V_\alpha = \{v \in V \mid \exists m \geq 1 \mid (T-\alpha)^m v = 0\}$.

Oss.: V_α è def. $\forall \alpha \in k$; se non ci sono autovett. gen. di autoval. α allora $V_\alpha = \{0\}$.

Teorema (decomp di Fitting): Dato T, abb. $V = \bigoplus_{\alpha \in k} V_\alpha$.

Per la dim.:

Oss.: Valgono le inclusioni $\ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \ker(T^3) \subseteq \dots$

$\mathrm{Im}(T) \supseteq \mathrm{Im}(T^2) \supseteq \mathrm{Im}(T^3) \supseteq \dots$

inoltre $T(\ker(T^i)) \subseteq \ker(T^{i+1})$ e $T(\mathrm{Im}(T^i)) = \mathrm{Im}(T^{i+1})$ $\forall i \geq 1$.

Lemma: Sia $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ t.c. $\mathrm{Im}(T^m) = \mathrm{Im}(T^{m+1})$, $\ker(T^m) = \ker(T^{m+1})$. Allora $V = \mathrm{Im}(T^m) \oplus \ker(T^m)$, e

$T|_{\mathrm{Im}(T^m)} : \mathrm{Im}(T^m) \to \mathrm{Im}(T^m)$ è invertibile,

$T|_{\ker(T^m)} : \ker(T^m) \to \ker(T^m)$ è nilpotente.

Dim.: T manda $\mathrm{Im}(T^m)$ in $\mathrm{Im}(T^{m+1})$ suriettivamente. Visto che questi due sottosp. vett. sono uguali, T manda uno nell'altro anche iniettivam.. Cioè la restrizione $T|_{\mathrm{Im}(T^m)} : \mathrm{Im}(T^m) \longrightarrow \mathrm{Im}(T^{m+1})$ è un isomorfismo, per cui ha nucleo nullo.

Lo stesso vale per T^m: manda isomorficamente $\mathrm{Im}(T^m)$ in se stesso, e T^m ha nucleo nullo se ristretto a $\mathrm{Im}(T^m)$. Allora

$\ker(T^m) \cap \mathrm{Im}(T^m) = \{0\}$, cioè $\ker(T^m)$ e $\mathrm{Im}(T^m)$ sono in somma diretta. Essendo il nucleo e l'imm. di uno stesso endomorfismo, abb. $V = \ker(T^m) \oplus \mathrm{Im}(T^m)$.

Il fatto che $T\big|_{\ker(T^m)}$ sia nilpotente è ovvio. $\square$

<u>Dim. Teorema di Fitting:</u> Possiamo supporre $V \neq \{0\}$.

Sia α un autovalore di T, esiste perché $k = \overline{k}$.

Applichiamo il lemma a $T - \alpha \mathrm{Id}_V$, e osserviamo che $V_\alpha = \ker\left((T-\alpha \mathrm{Id}_V)^m\right)$ per m abb. grande.

Per il lemma:

$$V = \overset{\neq \{0\}}{V_\alpha} \oplus \underbrace{W}_{\mathrm{Im}\left((T-\alpha\mathrm{Id}_V)^m\right)}$$

Oss. che W è stabile per $T - \alpha \mathrm{Id}_V$, quindi è stabile per T. Procediamo per induzione su $\dim(V)$, applicando il teorema a $T|_W : W \to W$. Otteniamo

$$V = V_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in k} W_\beta \right)$$

Rimane da dim. $W_\beta = V_\beta$ $\forall \beta \in k \setminus \{\alpha\}$, e che $W_\alpha = \{0\}$: <u>esercizio</u>.

(suggerim.: V_β è il più grande sottosp. vett. su cui T ha polinomio minimo che è una potenza di $\underset{\uparrow\,\text{variable}}{x}-\beta$)

$\square$

<u>Teorema</u> (decomposizione di Jordan-Chevalley): Sia $T: V \to V$ come prima. Esistono $T_n, T_s : V \to V$ lineari tali che

1) T_n nilpotente, T_s semisemplice (= <u>diagonalizzabile</u>),

2) $T = T_n + T_s$,

3) $T_n T_s = T_s T_n$,

4) esistono polinomi $p, q \in k[x]$ senza termine noto tali che $T_s = p(T)$, $T_n = q(T)$.

<u>Dimostrazione</u>: Poss. supp. $V \neq \{0\}$, consid. α autovalore di T.

Abb. $(T - \alpha\,\mathrm{Id}_V)\big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V_\alpha$ è nilpotente,

quindi c'è una base di V_α in cui ha matrice in $\mathcal{B}^u(\dim(V_\alpha))$.

Applicato ad ogni $\alpha \in k$, otteniamo una base di V in cui T ha matrice

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\alpha_1 & * \\ 0 & \alpha_1\end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix}\alpha_2 & * \\ 0 & \alpha_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix}\alpha_\ell & * \\ 0 & \alpha_\ell\end{matrix}\end{pmatrix}$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ gli autoval. di T.

Poniamo allora $T_s =$ la matr. diag. con $\alpha_1, .., \alpha_1, .., \alpha_\ell, .., \alpha_\ell$, e $T_n = T - T_s$. Segue: T_s semisemplice, T_n nilpotente, T_s e T_n commutano.

4) Cerchiamo $p(x) \in k[x]$, usando il teorema cinese dei resti in $k[x]$: dati polinomi $a_1, .., a_\ell \in k[x]$ primi fra loro, abb.

$$\frac{k[x]}{(a_1 \cdots a_\ell)} \longrightarrow \frac{k[x]}{(a_1)} \oplus \ldots \oplus \frac{k[x]}{(a_\ell)}$$

$$f + (a_1 \cdots a_\ell) \longmapsto \left(f + (a_1), \ldots, f + (a_\ell)\right)$$

è un isomorfismo lineare (dim.: esercizio, sugg.: è iniettiva e gli sp. vett. hanno la stessa dimensione).

Applichiamolo ai polinomi $(x - \alpha_1)^{m_1}, \ldots, (x - \alpha_\ell)^{m_\ell}$ dove m_i è tale che $(T - \alpha_i)^{m_i} \equiv 0$ su V_{α_i}, e all'elem.

$$(\alpha_1, .., \alpha_\ell) \in \bigoplus_{i=1}^{\ell} \frac{k[x]}{\left((x-\alpha_i)^{m_i}\right)}.$$

Otteniamo che esiste un polinomio $p(x)$ tale che

$$p(x) \equiv \alpha_i \qquad \bmod (x - \alpha_i)^{m_i}$$

Possiamo anche richiedere in più che $p(x) \equiv 0 \bmod x$: se 0 è fra gli autovalori allora questa condizione già c'è, altrim. mettiamo 0 come valore aggiuntivo $\alpha_{\ell+1}$.

Abbiamo: $$p(T)\Big|_{V_{\alpha_i}} = \alpha_i \cdot Id_{V_{\alpha_i}} + \underbrace{(T-\alpha_i)^{m_i}\Big|_{V_{\alpha_i}}}_{\parallel \atop 0} \cdot \tilde{p}(T)\Big|_{V_{\alpha_i}}$$

cioè $p(T)$ coincide con $\alpha_1 \cdot Id_{V_{\alpha_1}}$ su V_{α_1}, con $\alpha_2 \cdot Id_{V_{\alpha_2}}$ su V_{α_2}, ecc.... Quindi $p(T)$ coincide con T_s.

$\square$

<u>Corollario</u>: Sia T come nel teorema, allora T_s e T_n sono univocam. determinati dalle propr. 1), 2), 3).

<u>Dim.</u>: Siano T_s', T_n' che soddisfano 1), 2), 3). Allora commutano con T, quindi commutano con T_s, T_n del teorema perché quelli soddisfano anche 4).

Segue: a) $T_n - T_n'$ nilpotente

b) $T_s - T_s'$ semisemplice

(infatti sono diagonalizz. e commutano $\Rightarrow$ sono diagonalizzabili simultaneamente, cioè c'è una base di autovettori <u>comuni</u> a entrambi)

Ma $T_n - T_n' = T_s - T_s'$, e l'unico endomorfismo nilpotente semisemplice è quello nullo, per cui $T_n = T_n'$ e $T_s = T_s'$.

$\square$

FINE PARENTESI DI ALGEBRA LINEARE

Teorema (criterio di Cartan): Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ algebra di Lie.

Supp. $tr(xy) = 0$ $\forall x \in L$, $\forall y \in [L,L]$. Allora L è risolubile.

Per la dim.:

Lemma 1: Sia $x \in \mathfrak{gl}(V)$ come nel teo, consid. $ad(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$.

Vale $ad(x_s) = ad(x)_s$, $ad(x_n) = ad(x)_n$

Dim.: Abb. $ad(x) = ad(x_s) + ad(x_n)$ e commutano, cioè

$ad(x_s) \circ ad(x_n) = ad(x_n) \circ ad(x_s)$ (verifica facilissima).

Sappiamo già che $ad(x_n)$ è nilpotente, rimane da dim. che $ad(x_s)$ è semisemplice. Scegliendo una base di V in cui x_s è diagonale, mettiamo

$$x_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{gl}(V)$$

consid. la base di $\mathfrak{gl}(n)$ delle matrici elem. e_{ij}.

Allora $ad(x_s)(e_{ij}) = x_s e_{ij} - e_{ij} x_s = (\alpha_i - \alpha_j) e_{ij}$

cioè $ad(x_s)$ è diagonale risp. a questa base, con autoval. $\alpha_i - \alpha_j$ di e_{ij}. Segue: $ad(x_s)$ è semisemplice, e allora $ad(x_s) = ad(x)_s$, $ad(x_n) = ad(x)_n$ per l'unicità della decomp. di J-C.

$\square$

Lemma 2: Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ alg. di Lie, e sia

$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, L] \subseteq [L,L]\}$. Se $y \in M$ soddisfa

$tr(zy) = 0$ $\forall z \in M$ allora y è nilpotente.

Oss.: Il lemma vale più in generale, con $A \subseteq B$ sottosp. vett. qualsiasi e
$M = \{x \in gl(V) \mid [x, B] \subseteq A\}$.

Dim.: Dobb. dim. $Y_s = 0$, poss. supporre Y_s diagonale:

$$Y_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}$$

Idea: cercare tanti z con cui dare condizioni su Y_s.

Premessa: nella dim. useremo bracket con elem. di $gl(V)$ non necessariam. in L, quindi useremo $ad: gl(V) \to gl(gl(V))$ (e non $ad: L \to gl(L)$).

Oss.: $ad(y)(L) \subseteq [L, L]$, quindi $ad(Y)_s(L) \subseteq [L, L]$ (perché $ad(Y)_s$ è un polinomio in $ad(Y)$), e dal lemma 1 segue $ad(Y_s)(L) \subseteq [L, L]$.

Idea: questo produce altri elem. che mandano L in $[L, L]$, basta prendere un qualsiasi polinomio $f \in k[x]$ senza termine noto, e osservare che allora anche $f(ad(Y_s))(L) \subseteq [L, L]$.

Cerchiamo ora di esprimere $f(ad(Y_s))$ come $ad(z)$ per qualche $z \in gl(V)$, perché allora avremo trovato un $z \in M$.

Oss.: nella base e_{ij} delle matrici elementari, $ad(Y_s)$ è diagonale con autovalori $\alpha_i - \alpha_j$ (v. dim. Lemma 1), e quindi $f(ad(Y_s))$ è diagonale con autovalori $f(\alpha_i - \alpha_j)$.

La cosa più semplice sembrerebbe usare la stessa cosa anche per trovare z, cioè prendere $z = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$ diagonale,

così anche $ad(z)$ è diagonale con autovalori $\beta_i - \beta_j$, e

scegliere $\beta_1, \dots, \beta_n$ tali che $f(\alpha_i - \alpha_j) = \beta_i - \beta_j$.

In questo modo $f(ad(y_s)) = ad(z)$, e $z \in M$.

Vediamo se un tale z sarebbe utile per dire qualcosa su y_s.

Intanto z e y_s commutano (sono entrambe diagonali). Poi

$ad(z)$ è un polinomio in $ad(y_s)$, che è un polinomio in $ad(y)$,

quindi $ad(z)$ e $ad(y)$ commutano.

Segue: $[z, y] \in \ker(ad) = Z(gl(V))$. D'altronde $[z, y] \in$
$[gl(V), gl(V)] = sl(V)$, e $Z(gl(V)) \cap sl(V) = \{0\}$, quindi

z commuta anche con y, e allora anche con y_n.

A questo punto cerchiamo di sfruttare l'ipotesi $tr(yz) = 0$:

$$0 = tr(zy) = tr(z(y_s + y_n)) = tr(zy_s) + tr(\overbrace{zy_n}^{\text{nilpotente}}) =$$

$$= tr(zy_s) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n .$$

Sembra promettente per dim. che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, ma dobb.

capire per quali $\beta_1, \dots, \beta_n$ funziona tutto, e anche per <u>quali</u>

<u>polinomi</u> f. Non siamo liberi di scegliere i β_i a piacere,

perché se $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_l - \alpha_r$ allora $f(\alpha_i - \alpha_j) = f(\alpha_l - \alpha_r)$

e deve valere $\beta_i - \beta_j = \beta_\ell - \beta_r$. Cioè la „relazione lineare su $\mathbb{Z}$"
$\alpha_i - \alpha_j - \alpha_\ell + \alpha_r = 0$ deve valere anche per $\beta_i, \beta_j, \beta_\ell, \beta_r$.
Questa è in realtà l'unica condizione su $\beta_1, \dots, \beta_n$, perché se è verificata allora sicuram. esiste f polinomio tale che $f(\alpha_i - \alpha_j) = \beta_i - \beta_j$.
Un modo di assicurare che $\beta_1, \dots, \beta_n$ rispettano questa condizione è sceglierli in modo „$\mathbb{Q}$-lineare" rispetto a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, cioè consid. un'appl. $\mathbb{Q}$-lineare $\eta : \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ e porre $\beta_i = \eta(\alpha_i)$ $\forall i$. Allora se $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_\ell - \alpha_r$ vale $\beta_i - \beta_j =$
$= \eta(\alpha_i) - \eta(\alpha_j) = \eta(\alpha_i - \alpha_j) = \eta(\alpha_\ell - \alpha_r) = \eta(\alpha_\ell) - \eta(\alpha_r) = \beta_\ell - \beta_r$.
Quindi $\forall \eta$ vale $0 = \alpha_1 \eta(\alpha_1) + \dots + \alpha_n \eta(\alpha_n)$. Non è difficile concludere a questo punto che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, ma facciamolo con un <u>ultimo trucco</u>: applichiamo η, ottenendo $\eta(\alpha_1)^2 + \dots + \eta(\alpha_n)^2 = 0$, cioè $\eta = 0$. Ma se $\eta = 0$ $\forall \eta$ allora $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{0\}$, cioè $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, e concludiamo $y_s = 0$

$\square$

<u>Dim. criterio di Cartan</u>: Dim. che $[L, L]$ è nilpotente col teorema di Engel.

Usiamo il Lemma 2:

$M = \{ z \in \mathfrak{gl}(V) \mid [z, L] \subseteq [L, L] \}$, e oss. $M \supseteq L$.

Sappiamo che $\mathrm{tr}(xy) = 0$ $\forall x \in L$, $\forall y \in [L, L]$. Per usare il Lemma, abb. bisogno di $\mathrm{tr}(zy) = 0$ $\forall z \in M$. D'altronde

$$\mathrm{tr}(\underset{\in[L,L]}{zy}) = \mathrm{tr}\Big(z \cdot \sum_i [\underset{L}{u_i}, \underset{L}{w_i}]\Big) = \sum_i \mathrm{tr}\big([z,u_i]\, w_i\big) =$$

($\mathrm{tr}(a\cdot[b,c]) = \mathrm{tr}([a,b]\cdot c)$, verifica per esercizio)

$= 0$ perché $[z,u_i] \in [L,L]$ (visto che $z \in M$) e $w_i \in L$.

Allora il Lemma 2 si applica a y, cioè y è nilpotente $\forall y \in [L,L]$.
Per il Teorema di Engel, $[L,L]$ è nilpotente. Allora L è risolubile (Corollario al 2° teorema di „punto fisso").

<u>Corollario:</u> Sia L alg. di Lie. Se $\mathrm{tr}(ad(x)ad(y)) = 0$ $\forall x \in L$, $\forall y \in [L,L]$, allora L è risolubile.

<u>Dim.:</u> Basta applicare il criterio di Cartan a $ad(L)$, ottenendo $ad(L) \cong \frac{L}{Z(L)}$ risolubile, da cui L risolubile. $\square$

SEMISEMPLICITA'

Usiamo:

<u>Def.:</u> Sia L algebra di Lie. La <u>forma di Killing</u> è

$$K_L : L \times L \longmapsto k$$
$$(x, y) \longmapsto tr(ad(x)\, ad(y))$$

Oss.: 1) K_L è una forma bilineare

2) K_L è associativa, nel senso che

$$K_L(x, [y,z]) = K_L([x,y], z) \qquad \forall x, y, z \in L$$

verifica: esercizio

Esempio: $K_{sl(2)}$: Nella base (e, h, f) di $sl(2)$ abb.

$$ad(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice di $K_{sl(2)}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es. $tr(ad(e) \circ ad(f)) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= tr\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$

Sarà utile confrontare la forma di Killing di un'alg. di Lie L e quella di un suo ideale qualsiasi $I \subseteq L$:

Lemma: Sia L alg. di Lie con forma di Killing $K_L : L \times L \to k$, e sia $I \subseteq L$ ideale con forma di Killing $K_I : I \times I \longrightarrow k$.

Allora $K_I = K_L|_{I \times I}$.

Dim.: Dato $x \in I$, $ad(x)$ manda tutta L in I, quindi $ad(x)$ ha matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} ad(x)\big|_I & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\underleftrightarrow{\text{base di } I}$

. Anche $ad(x)ad(y)$ ha forma così a blocchi, se $x,y \in I$, per cui $tr(ad(x)ad(y)) = tr(ad(x)\big|_I\, ad(y)\big|_I)$.

$\square$

La forma di Killing fornisce un criterio di semisemplicità:

Teorema: L semisemplice $\iff$ K_L non degenere.

Dim.: Def. $R = \{x \in L \mid K_L(x,y) = 0 \ \forall y \in L\}$

R è un ideale di L, infatti se $x \in R$ e $z \in L$ allora

$K_L([x,z],y) = K_L(x,[z,y]) = 0 \quad \forall y \in L$, per cui $[x,z] \in R$.

Inoltre R è risolubile per il criterio di Cartan, $R = \{0\}$ se e solo se K_L è nondegenere.

$\Rightarrow)$ Se L è semis. allora $(R \subseteq)\ Rad(L) = \{0\}$.

$\Leftarrow)$ Supp. $R = \{0\}$, sia $Rad(L) \neq \{0\}$ per assurdo.

Allora $Rad(L)^{(i)}$ è un ideale di L $\forall i \geq 0$ (dim. per induzione: esercizio). Segue: l'ultimo termine nonnullo della serie derivata di $Rad(L)$ è un ideale $I \neq \{0\}$ abeliano di L. Vogliamo dim. che $I \subseteq R$, sarebbe l'assurdo cercato.

Prendiamo $x \in I$, $y \in L$ e calcoliamo $K_L(x,y)$, vedendo cosa fa $ad(x)ad(y)$:

$$L \xrightarrow{ad(y)} L \xrightarrow{ad(x)} I \xrightarrow{ad(y)} I \xrightarrow{ad(x)} \{0\}$$

Quindi $ad(x)ad(y)$ è nilpotente, per cui $K_L(x,y)=0$. Assurdo, quindi L è semisemplice.

$\square$

Def.: Date L_1, L_2 algebre di Lie (qualsiasi), la somma diretta $L_1 \oplus L_2$ è un'algebra di Lie sullo sp. vett. $L_1 \times L_2$ e bracket $[(a,b),(c,d)] = ([a,c],[b,d])$

Oss.: L_1 identif. con $L_1 \times \{0\}$ e L_2 identificata con $\{0\} \times L_2$ sono ideali di $L_1 \oplus L_2$. Inoltre ogni ideale di L_i è ideale anche di L.

Poss. ora dimostrare il legame fra alg. di Lie semplici e semisemplici.

Teorema: Sia L alg. di Lie. L è semisemplice se e solo se è somma diretta di algebre di Lie semplici:

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_t$$

(è ammesso il caso $t=0$, cioè $L = \{0\}$)

In tal caso $L_1, \dots, L_t$ sono gli ideali semplici di L, per cui la decomp. è unica a meno dell'ordine.

<u>Dim.:</u> $\Leftarrow$) Se L è somma diretta come sopra, allora le proiez. $\pi_i : L \to L_i$ sono omom. suriett. di algebre di Lie, e $\pi_i(\mathrm{Rad}(L))$ è un ideale risolubile di $\mathrm{Im}(\pi_i) = L_i$, quindi $\pi_i(\mathrm{Rad}(L)) = \{0\}$ $\forall i$, segue $\mathrm{Rad}(L) = \{0\}$.

$\Rightarrow$) Sia I ideale $\neq \{0\}$ minimale (se non ce ne sono allora $L = \{0\}$). Allora I non è risolubile, e consid. $I \cap I^\perp$ ($I^\perp$ risp. a K_L).

Ora: $I^\perp$ è un ideale, infatti dati $x \in I^\perp$, $y \in L$, $z \in I$:

$$K_L([x,y],z) = K_L(x, \underbrace{[y,z]}_{\in I}) = 0, \quad \text{per cui } [x,y] \in I^\perp.$$

Vogliamo $I \cap I^\perp \overset{(?)}{=} \{0\}$, ma ricordiamo che non segue semplicem. dal fatto che K_L è non degenere! Però $I \cap I^\perp$ è un ideale di L, e per il lemma $K_{I\cap I^\perp} = K_L\big|_{(I\cap I^\perp)\times(I \cap I^\perp)}$, che è nulla. Per il criterio di Cartan $I \cap I^\perp$ è risolubile, quindi $I \cap I^\perp = \{0\}$.

Ora: dal fatto che κ_L è non degenere segue $\dim(I)+\dim(I^\perp)=$

$=\dim(L)$, e concludiamo $L = I \oplus I^\perp$ (somma diretta di alg. di Lie).

Oss. anche che allora ogni ideale di I è anche ideale di L.

Inoltre I non è risolubile $\Rightarrow$ non è abeliano $\Rightarrow$ è semplice!

Per induzione su $\dim(L)$: $I^\perp = L_2 \oplus \_ \oplus L_n$, e

allora $L = \underset{\substack{\| \\ I}}{L_1} \oplus \_ \oplus L_n$.

Infine, sia I ideale semplice. Segue $[I,L] = \begin{cases} \{0\} \\ I \end{cases}$, ma

$\{0\}$ vorrebbe dire $I \subseteq Z(L) = \{0\}$, assurdo. Allora

$[I,L]=I$. Ma

$[I,L] = [I, L_1 \oplus \_ \oplus L_n] = [I,L_1] \oplus \_ \oplus [I,L_n]$.

Segue, $I = [I, L_i]$ per qualche i, cioè

$I \subseteq L_i$, quindi $I = L_i$. $\square$

Corollario: Se L è semisemplice allora $L=[L,L]$, ogni immagine omomorfa di L è semisemplice, e gli ideali di L sono le somme di alcuni degli L_i.

Dim.: $L^{(1)} = L_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus L_t^{(1)} = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t = L$

Sia poi $I \subseteq L$ ideale, e consid. $J = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \pi_i(I)$

Abb. $\pi_i(I) = L_i$ opp. $\{0\}$, e chiaram. $I \subseteq J$. Inoltre

$I \supseteq [I, L_i] = [\pi_i(I), L_i] = \pi_i(I)$, quindi $I \supseteq J$.

Segue anche che ogni imm. omomorfa è somma diretta di alcuni degli L_i. $\square$

Ora il nostro obiettivo è dim. che ogni rappr. di un'alg. di Lie semisemplice è <u>completam. riducibile</u> (Teo. di Weyl).

Altre consid. sulle rappr. di alg. di Lie

Def: Siano V, W spazi vettoriali. Uno sp. vett. P con un'appl. bil. $V \times W \xrightarrow{p} P$ è detto <u>prod. tensoriale</u> di V e W se $\forall\, q: V\times W \to Q$ bil. con Q sp. vett. $\exists!\, r: P \to Q$ lineare tale che

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & Q \\ & P \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $q = r \circ p$.

Prop.: Un prodotto tensoriale esiste ed è unico a meno di isom.. Si denota $V \otimes W$, e $p(v,w)$ si denota con $v \otimes w$. Una base di $V \otimes W$ si ottiene con i vettori $v_i \otimes w_j$ dove i v_i formano una base di V e i w_j formano una base di W.

Dim.: Sia $P = \mathrm{Span}\{v_i \otimes w_j\}$ e definiamo $V \times W \longrightarrow P$, $(v_i, w_j) \longmapsto v_i \otimes w_j$, estesa per bilinearità, cioè

$$\left(\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j w_j\right) \longmapsto \sum_{i,j} a_i b_j \, v_i \otimes w_j$$

Data $q : V \times W \to Q$, basta porre $r(v_i \otimes w_j) = q(v_i, w_j)$. $\square$

Oss.: 1) Se V e W hanno dim. finita allora
$$\mathrm{Hom}(V,W) \cong W \otimes V^*, \quad \text{tramite} \quad w \otimes \eta \longmapsto (v \mapsto \eta(v) w).$$

2) Gli elem. di $V \otimes W$ sono <u>comb. lin.</u> di vettori del tipo $v \otimes w$ con $v \in V$, $w \in W$.

<u>Esercizio:</u> Un $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ si scrive come $w \otimes \eta$ se e solo se ha <u>rango 1</u>.

Def.: Se V, W sono G-moduli (G = gruppo) $V \otimes W$ ha struttura naturale di G-modulo con $g.(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw)$. Se sono L-moduli (L = alg di Lie) allora si pone $x.(v \otimes w) = (x v) \otimes w + v \otimes (x.w)$.

Inoltre $\mathrm{Hom}(V,W)$ è un G-modulo ponendo $(g.f)(v) = g \cdot f(g^{-1}v)$ e un L-modulo ponendo $(x.f)(v) = f(-xv) + x.f(v)$.

<u>Esercizio:</u> Verificare che questo rende $V \otimes W$ e $\mathrm{Hom}(V,W)$ effettivamente dei G-moduli, rispett. L-moduli, e che l'isom. dato $W \otimes V^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W)$ è isom. di G-moduli, rispett. L-moduli.

Lemma (Schur): Se V è un L-modulo irriducibile, $(\varphi : L \to gl(V))$ ← alg. di Lie

$$Z_{gl(V)}(\varphi(L)) = k \cdot Id_V$$

Dim.: $\supseteq$ ovvio.

$\subseteq$ Sia $y \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$, y ha un autosp. $W \subseteq V$ di autovalore α. ($\neq \{0\}$)

Allora W è L-stabile, perché $\forall x \in L, \forall v \in W$

$$y(x.v) = x.(yv) = x.(\lambda v) = \lambda\, x.v.$$

Segue $W = V$ e $y = \alpha \cdot Id_V$. $\square$

Elem. di Casimir di una rappr.

Sia $\varphi : L \to gl(V)$ rappr., supp. φ fedele ($=$ iniettiva).

Def.: $$b_\varphi : L \times L \longrightarrow k$$
$$(x,y) \longmapsto tr(\varphi(x)\varphi(y))$$

Proprietà: 1) associatività: $b_\varphi([x,y],z) = b_\varphi(x,[y,z]) \quad \forall x,y,z \in L$

2) il nucleo $\{x \mid b_\varphi(x,y) = 0\ \forall y \in L\}$ è un ideale di L.

3) se L è semisemplice b_φ è non degenere

(dim. come per κ_L).

Def.: Sia L semisemplice, φ rappr. fedele, sia $(x_1, \dots, x_n)$ base di L, $(y_1, \dots, y_n)$ base duale rispetto a b_φ, cioè $b_\varphi(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. L'__elem. di Casimir__ di φ è

$$c_\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\varphi(y_i)$$

__Oss.:__ Se $(x_1', \dots, x_n')$ è un'altra base di L, $(y_1', \dots, y_n')$ base duale, poniamo

$$x_i' = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell i}\, x_\ell \,, \qquad A = (a_{ij}) \text{ matr. del camb. di base.}$$

$$y_i' = \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell i}\, y_\ell \,, \qquad B = (b_{ij}) \text{ ——— , ———}$$

Allora $\delta_{ij} = b_\varphi(x_i', y_j') = \sum_{\ell, m} a_{\ell i}\, b_{mj}\, b_\varphi(x_\ell, y_m) = \sum_\ell a_{\ell i}\, b_{\ell j}$

da cui $B = {}^tA^{-1}$.

Segue
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i')\varphi(y_i') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell, m=1}^{n} a_{\ell i}\, \varphi(x_\ell)\, b_{mi}\, \varphi(y_m) =$$
$$= \sum_{\ell, m=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{\ell i}\, b_{mi} \right)}_{=\delta_{\ell m}} \varphi(x_\ell)\,\varphi(y_m) = \sum_{\ell=1}^{n} \varphi(x_\ell)\varphi(y_\ell)$$

cioè c_φ non dip. dalla scelta della base di L.

__Lemma:__ $c_\varphi \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$

__Dim.:__ Usiamo $[A, BC] = [A,B]\cdot C + B\cdot[A,C]$ $\forall A, B, C \in gl(V)$ (cioè $ad(A)$ è una derivazione di $gl(V)$ anche come algebra __associativa__ col prodotto usuale), dim.: esercizio.

Dato $x \in L$, scriviamo $[x, x_i] = \sum_j \alpha_{ij} x_j \quad [x, y_i] = \sum_j \beta_{ij} y_j$

Allora $$\alpha_{ij} = \sum_l \alpha_{il} b_\varphi(x_l, y_j) = b_\varphi\left(\sum_l \alpha_{il} x_l, y_j\right) =$$

$$= b_\varphi([x, x_i], y_j) = -b_\varphi([x_i, x], y_j) = -b_\varphi(x_i, [x, y_j]) =$$

$$= \underset{\uparrow \text{stessi passaggi}}{\ldots} = -\beta_{ji}$$

e calcoliamo

$$[\varphi(x), c_\varphi] = \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)\varphi(y_i)] = \sum_i \Big(\overbrace{[\varphi(x), \varphi(x_i)]}^{\varphi([x, x_i])} \varphi(y_i) + \varphi(x_i) \cdot \overbrace{[\varphi(x), \varphi(y_i)]}^{\varphi([x, y_i])} \Big)$$

$$= \sum_{i,j} \Big(\alpha_{ij} \varphi(x_j)\varphi(y_i) + \beta_{ij} \varphi(x_i)\varphi(y_j) \Big) =$$

$$= \sum_{i,j} \Big(\alpha_{ij} \varphi(x_j)\varphi(y_i) \Big) + \sum_{j,i} \underbrace{(-\alpha_{ij})}_{\beta_{ji}} \varphi(x_j)\varphi(y_i) = 0$$

$\square$

<u>Oss.</u>: 1) $$tr(c_\varphi) = \sum_i^m tr(\varphi(x_i)\varphi(y_i)) = \sum_i b_\varphi(x_i, y_i) = \dim(L)$$

2) Supp. φ <u>irriducibile</u>, allora $c_\varphi \in k \cdot Id_V$ cioè $\exists \alpha \in k \mid$

$c_\varphi = \alpha \cdot Id_V$, e allora

$$tr(c_\varphi) = \alpha \cdot \dim(V) \ (= \dim(L)) \quad \text{da cui} \quad \alpha = \frac{\dim(L)}{\dim(V)}.$$

Esempio: $L = sl(2)$ $\qquad \varphi: sl(2) \to gl(2)$ l'inclusione

base (e, h, f), $\qquad$ base duale $(f, \frac{h}{2}, e)$

$$c_\varphi = ef + \frac{1}{2}h^2 + fe = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{\dim(L)}{\dim(V)} \cdot I_2$$

Teorema (Weyl): Sia L semisemplice, V L-modulo.

Allora V è completam. riducibile.

Dim.: Sia $W \subseteq V$ sottomodulo, $W \neq \{0\}$ e $\neq V$. Dm che W ha un supplementare L-stabile U, cioè tale che $V = W \oplus U$. Questo è equivalente ($\forall W$) alla completa riducibilità di V. Procediamo per induz. su $\dim(V)$. Inoltre possiamo assumere φ fedele, eventualm. rimpiazzando L con $\varphi(L)$ ($\varphi: L \to gl(V)$). Inoltre poss. assumere $\varphi(L) \neq \{0\}$, altrim. ogni sottosp. vett. è un sottomodulo e in questo caso V è completam. riducibile.

1) Supp. $\operatorname{codim}(W) = 1$. Allora $\frac{V}{W}$ è un L-modulo di dim. 1, cioè $L \to gl(V/W) = gl(1)$, ma $L = [L, L]$ quindi l'immagine di L in $gl(1)$ è dentro $sl(1) = \{0\}$, cioè V/W è l'L-modulo nullo ($x.(v+W) = 0+W \ \forall x \in L, v \in V$) da cui segue: L manda V in W.

1a) Supp. inoltre W irriducibile. Allora $\boxed{c_\varphi}$ ci fornirà un supplementare!

Abbiamo: $c_\varphi: V \to V$ commuta con $\varphi(L)$; un altro modo di esprimere questa cosa è dire che c_φ è un omomorfismo di L-moduli, infatti

$$c_\varphi(x.v) = x.c_\varphi(v) \qquad \forall x \in L, \forall v \in V.$$

Segue che $\ker(c_\varphi)$ è un L-sottomodulo, e vogliamo $V \overset{(?)}{=} W \oplus \ker(c_\varphi)$.

Osserviamo che $c_\varphi(V) \subseteq W$ perché ogni $\varphi(x_i)$ e $\varphi(y_i)$ manda V in W.

Infine, c_φ agisce come uno scalare α su W per il lemma di Schur, perché $c_\varphi|_W : W \to W$ commuta con $\varphi(x)|_W : W \to W$ $\forall x \in L$. Scegliamo una base di V che comincia con una base di W. La matrice di c_φ in questa base è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & 0 & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \alpha & * \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$\longleftrightarrow$ base di W ← scalare con cui agisce c_φ su V/W

Se $\alpha = 0$ allora $tr(c_\varphi) = 0$ ma $tr(c_\varphi) = \dim(L) \neq 0$ assurdo.

Quindi $\alpha \neq 0$, allora $W \cap \ker(c_\varphi) = \{0\}$, e $\dim(\ker(c_\varphi)) = 1$, quindi

$U = \ker(c_\varphi)$ è un supplementare L-stabile di W. Il caso 1a) è concluso.

1b) Supponiamo W non irriducibile, sia W' L-sottomodulo con $\{0\} \neq W' \neq W$.

Consid. $\frac{V}{W'} \supseteq \frac{W}{W'}$: abb. $\dim\left(\frac{V}{W'}\right) < \dim(V)$, quindi

$$\frac{V}{W'} = \frac{W}{W'} \oplus Z \qquad \text{con } Z \text{ } L\text{-sottomodulo} \subsetneq \frac{V}{W'}$$

Essendo un sottosp. del quoziente, Z è della forma $\frac{\tilde{Z}}{W'}$, $\tilde{Z} \subsetneq V$.

E visto che L manda $\frac{\tilde{Z}}{W'}$ in $\frac{\tilde{Z}}{W'}$, e W' in W', allora manda

$\tilde{Z}$ in $\tilde{Z}$, cioè $\tilde{Z}$ è un L-modulo. Ric: $\dfrac{V}{W'} = \dfrac{W}{W'} \oplus \dfrac{\tilde{Z}}{W'}$.

Segue $V = W + \tilde{Z}$, ma W e $\tilde{Z}$ potrebbero avere intersez. $\supsetneq \{0\}$.

Allora osservo che per induzione $\tilde{Z}$ è completam. riducibile e contiene il sottomodulo $\tilde{Z} \cap W$, quindi esiste U sottomodulo con $\tilde{Z} = (\tilde{Z} \cap W) \oplus U$.

Ora $V = W + \left((\tilde{Z} \cap W) \oplus U \right) = W \oplus U$.

2) Discutiamo il caso $\operatorname{codim}_V(W)$ <u>qualsiasi</u>, usando $\operatorname{Hom}(V,W) = \{ f : V \to W \text{ lineare} \}$. Definiamo

$$\mathcal{V} = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare},\ f|_W \in k\, \mathrm{Id}_W \}$$

Il sottosp. $\mathcal{V}$ di $\operatorname{Hom}(V,W)$ è un sottomodulo: dati $x \in L$, $f \in \mathcal{V}$, $w \in W$ abb. $(x.f)(w) = x.\, f(w) - f(x.w) = x.\alpha w - \alpha \cdot x.w = 0$. Cioè vale

$$\left(f|_W = \alpha \cdot \mathrm{Id}_W \right)$$

ancora di più: se $f \in \mathcal{V}$ allora $x.f$ è <u>zero</u> su W.

Consid. $\mathcal{W} = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare},\ f|_W = 0 \}$, segue $x.\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ $\forall x \in L$, in particolare $\mathcal{W}$ è un L-sottomodulo. Ha anche codim. 1, perché fissata $\bar{f} \in \mathcal{V}$ tale che $\bar{f}|_W = \mathrm{Id}_W$, ogni $f \in \mathcal{V}$ si scrive come

$$f = \overbrace{(f - \underset{\substack{\uparrow \\ f|_W = \alpha \cdot \mathrm{Id}_W}}{\alpha} \bar{f})}^{\in \mathcal{W}} + \alpha \bar{f}.$$

Per 1), $V = W \oplus U$, U supplementare L-stabile di dim. 1, sia $U = k \cdot f_0$.

Vale $x.f_0 = 0 \ \forall x \in L$, perché $x.V \subseteq W$ (visto prima), e $x.f_0 \in U$ (perché U è sottomodulo), per cui $x.f_0 \in W \cap U = \{0\}$.

Cioè $\forall v \in V$: $0 = (x.f_0)(v) = x.f_0(v) - f_0(x.v)$, cioè $f_0 : V \to W$ è un omom. di L-moduli.

Segue: $U = \ker(f_0)$ è un sottomodulo di V, e inoltre $U \cap W = \{0\}$ perché f su W è la moltiplicaz. per $\alpha \neq 0$, quindi $\ker(f|_W) = \{0\}$.

D'altronde $f_0(V) = W$ quindi $\dim(U) = \dim(V) - \dim(W)$ e allora $V = W \oplus U$.

$\square$

Completa riducibilità per gruppi compatti

In questa sezione assumiamo noto il concetto di forma differenziale su varietà, e l'integrazione di m-forme su varietà di dim. m.

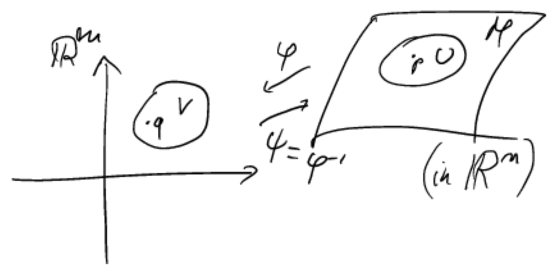
Ric.: Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una sottovarietà immersa. Una <u>k-forma differenziale</u> su M è il dato $\omega = (\omega_p)_{p \in M}$ di un'applicazione

$$\omega_p : \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

per ogni $p \in M$, tale che ω_p sia multilineare alternante, cioè $\omega_p \in \Lambda^k (T_pM)^*$.

Dato un aperto $U \subseteq M$ e una carta locale $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ di M in U, si definisce l'integrale

$$\int_U \omega = \int_V f_\varphi \, dx_1 \dots dx_m$$



dove la funzione f_φ ($: V \to \mathbb{R}$) è definita nel punto $q = \varphi(p)$ nel modo seguente: consid. $\varphi^{-1} = \psi : \underset{\text{aperto di } \mathbb{R}^m}{V} \longrightarrow U$ e le derivate parziali

$$w_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(q), \dots, w_m = \frac{\partial \psi}{\partial x_m}(q).$$

Questi sono vettori di $\mathbb{R}^n$, e sono tutti nello sp. tangente T_pM (sono una <u>base</u> di T_pM). Allora si pone

$$f_\varphi(q) = \omega_p(w_1, \dots, w_m) \qquad \left(w_i = (d\psi)_q \, (e_i) \text{ i-esimo vett. della base canonica} \right)$$

L'integrale è ben definito se ω_p è tale che f_φ è integrabile e $\int_V f_\varphi$ è finito.

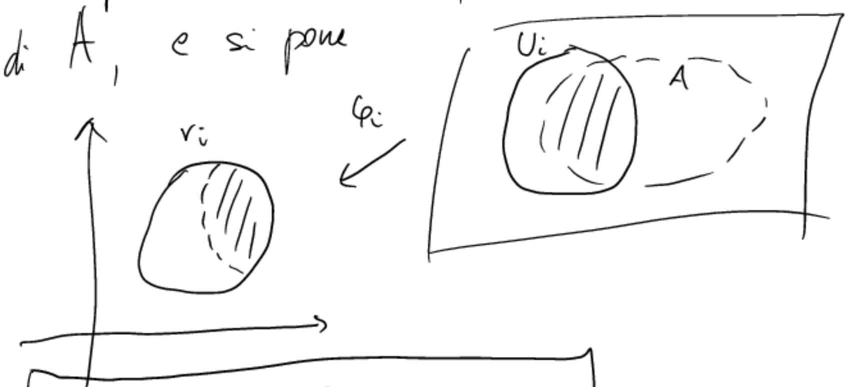
Inoltre ω si dice <u>differenziabile o C^∞</u> se f_φ è C^∞ $\forall$ carta locale $\varphi : U \to V$.

Supp. M orientata, ω una m-forma differenziale C^∞ su cioè esiste un atlante di carte locali tali che i cambiam. di coordinate hanno matrice Jacobiana a det. positivo in ogni punto. Allora si definisce l'integrale

$$\int_A \omega$$

per ogni aperto A nel modo seguente:

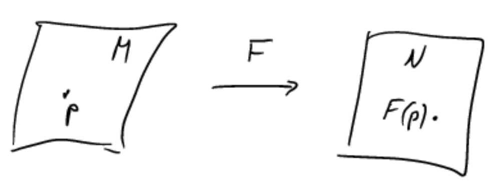
si considera un atlante $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}$ orientato di M, una partizione dell'unità $p_i : U_i \to \mathbb{R}$ subordinata al ricoprim. $\{U_i \cap A\}$ di A, e si pone



$$\boxed{\int_A \omega = \sum_i \int_{V_i \cap \varphi_i(U_i \cap A)} f_\varphi \, dx_1 \dots dx_m}$$

Questo è ben definito se ogni integrale e anche la loro somma sono finiti. Ad esempio questo è vero se ω è a supporto compatto, cioè se esiste un compatto al di fuori del quale valga $\omega_p = 0$.

Def: Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo fra var. diff. di dim. m immerse in $\mathbb{R}^n$. Data ω k-forma diff. su N, si def. $F^*(\omega)$ forma diff. su M tale che



$$(F^*(\omega))_p (v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)} (dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k))$$

$\forall p \in M$. Se $k = m$ allora vale $\displaystyle\int_A \omega = \int_{F^{-1}(A)} F^*(\omega)$.

Proposiz.: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso. Esiste una m-forma differenziale (differenziabile) ω mai nulla t.c. $m = \dim(G)$ e

$$L_g^*(\omega) = \omega$$

$\forall g \in G$. Inoltre una tale ω è unica a meno di moltipl. per scalari non nulli, e si denota anche con $\omega = dg$.

Dim.: $L_g : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto gx$ è un diffeomorfismo $\forall g$, e manda $I_n \in G$ in $g \in G$.

Basta scegliere una base $(v_1, \ldots, v_m)$ di $Lie(G) = T_{I_n} G$ e un valore $\alpha = \omega_{I_n}(v_1, \ldots, v_m) \neq 0$.

Allora si definisce (usando $(dL_g)_e : T_e G \to T_g G$ isom. lineare)

$$\omega_g\left((dL_g)_e(v_1), \ldots, (dL_g)_e(v_m)\right) = \omega_e(v_1, \ldots, v_m) = \alpha .$$

Questo definisce ω_g su una base di $T_g G$, e definisce in modo unico una forma m-multilineare alternante su $T_g G$. Oss. anche che le applicazioni $(dL_g)_e : T_e G \to T_g G$ e $(dL_{g^{-1}})_g : T_g G \to T_e G$ sono una l'inversa dell'altra, quindi vale

$$\omega_g(w_1, \ldots, w_m) = \omega_e\left((dL_{g^{-1}})_g(w_1), \ldots, (dL_{g^{-1}})_g(w_m)\right) \qquad (*).$$

Esercizio: Dimostrare che ω è C^∞ (usando la formula $(*)$, o in altro modo).

Verifichiamo la formula $L_g^*(\omega)=\omega \quad \forall g\in G$.

Dato $h\in G$ e vettori $u_1,\dots,u_m \in T_h G$,

la forma diff. $L_g^*(\omega)$ vale in h e nei vettori $u_1,\dots,u_m$:

$$\left(L_g^*(\omega)\right)_h(u_1,\dots,u_m) = \omega_{L_g(h)}\left(\overbrace{(dL_g)_h(u_1)}^{z_1},\dots,\overbrace{(dL_g)_h(u_m)}^{z_m}\right) = \dots$$

(qui $L_g(h)=gh$, $(dL_g)_h : T_hG \to T_{gh}G$)

$$\dots = \omega_{gh}(\dots) = \omega_e\left((dL_{(gh)^{-1}})_{gh}(z_1),\dots,(dL_{(gh)^{-1}})_{gh}(z_m)\right) = \dots$$

Ora: $L_{(gh)^{-1}} = L_{h^{-1}g^{-1}} = L_{h^{-1}}\circ L_{g^{-1}}$ quindi dato $gh\in G$ abb.

$$\begin{tikzcd} T_{gh}G \arrow[r, "dL_{g^{-1}}"] \arrow[rr, bend right, "(dL_{(gh)^{-1}})_{gh}"'] & T_{g^{-1}gh}G = T_hG \arrow[r, "dL_{h^{-1}}"] & T_eG \end{tikzcd}$$

$$(dL_{(gh)^{-1}})_{gh} = (dL_{h^{-1}})_{\underbrace{g^{-1}gh}_{=h}} \circ (dL_{g^{-1}})_{gh}$$

Quindi l'uguaglianza prosegue così:

$$\dots = \omega_e\left(\left((dL_{h^{-1}})_h \circ (dL_{g^{-1}})_{gh} \circ (dL_g)_h\right)(u_1),\dots\right) =$$

una l'inversa dell'altra

$$= \omega_e\left((dL_{h^{-1}})_h(u_1),\dots,(dL_{h^{-1}})_h(u_m)\right) = \omega_h(u_1,\dots,u_m)$$

cioè $L_g^*(\omega)=\omega \quad \forall g\in G$.

Osserviamo infine che ω dipende solo da α, perché $L_g(\omega)=\omega \Rightarrow (*)$, e scegliere un altro valore $\beta \in \mathbb{R}$ cambia solo ω in $\omega \cdot \underbrace{\beta/\alpha}_{\in \mathbb{R}_{\neq 0}}$. $\square$

<u>Proposizione</u>: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sgr chiuso, allora G è una var. diff. <u>orientabile</u>.

<u>Dim.</u>: Abb. visto che G ha un atlante con carte locali tutte del tipo seguente: fissato $g \in G$ prendiamo di nuovo

$$\varphi_g : U_g \to V_g \subseteq Lie(G) \qquad (\varphi_g)^{-1}(X) = g\, e^X \qquad \left(\begin{matrix} U_g = \text{intorno di } g \\ \text{in } G \end{matrix}\right)$$
$$x \mapsto \log(g^{-1}x) = X$$

Verifichiamo che è un atlante orientato, prendiamo $h \in U_1 \cap U_2$

$\left(\varphi_i = \varphi_{g_i},\ U_i = U_{g_i},\ V_i = V_{g_i}\right)$ e scriviamo il cambiam. di coordinate:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(X) = \varphi_2\left(\varphi_1^{-1}(X)\right) = \varphi_2\left(g_1 e^X\right) =$$

$$= \log(g_2^{-1} g_1 e^X) = \log \circ L_{g_2^{-1}} \circ L_{g_1} \circ \exp(X).$$

Poss. assumere U_g e V_g connessi $\forall g$, e ric. che $d\exp|_0$ è l'identità. Quindi il differenziale di exp ha det. >0 intorno a 0, e quello di log anche, intorno a I_n. Rimane da esaminare il differenziale di L_g, e per questo supp. G connesso.

Allora la funzione $(g,h) \mapsto \det(dL_g)_h$ è una funzione continua in g e h, è mai nulla su $G\times G$, ed è 1 per $g=h=e$. Visto che $G\times G$ è connesso, segue $\det(dL_g)_h > 0 \quad \forall g,h$.

Sia ora G non nec. connesso. Il ragionam. di prima mostra che G^0 è orientabile, essendo G unione disgiunta di classi laterali di G^0, ognuna diffeomorfa a G^0, segue che G è orientabile.

$\square$

<u>Oss.</u>: 1) L'applicazione $A \mapsto \int_A dg$ è definita sugli aperti A di G per i quali l'integrale è finito. Si estende a una <u>misura</u> su G detta <u>misura di Haar</u> invariante per

le traslazioni a sinistra L_g $\forall g \in G$

cioè $\mu(Y) = \mu(L_g(Y))$ $\forall Y \subseteq G$ misurabile, dove $\mu =$ mis. di Haar.

2) Se G è compatto si dim. facilmente che $\int_G dg$ è finito, quindi si normalizza di solito dg in modo che $\int_G dg = 1$.

3) Si usa la notazione dg ma questa forma diff. in generale non è esatta, ad es. per $G = S^1$ la sua classe genera $H^1_{dR}(S^1)$.

<u>Teorema</u>: Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ sottogruppo chiuso <u>compatto</u>. Ogni rappr. continua di G è completam. riducibile.

La dimostrazione usa il cosiddetto „trucco unitario" di Weyl (perché ne esiste una versione del tutto analoga per $GL(n, \mathbb{C})$ che usa prodotti Hermitiani).

<u>Proposizione</u>: Sia G un gruppo e $\varphi: G \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ una rappr..
Supponiamo esista un prod. scalare $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stabilizzato da G, cioè $b(v, w) = b(gv, gw)$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $\forall g \in G$. Allora φ è completam. riducibile.

Dim. prop.: Per un esercizio dei fogli settimanali, φ è completam. riducibile se e solo se $\forall U \subseteq \mathbb{R}^n$ sottomodulo $\exists W \subseteq \mathbb{R}^n$ sottomodulo t.c.

$$\mathbb{R}^n = U \oplus W.$$

Sia ora $W \subseteq \mathbb{R}^n$ sottomodulo, e sia $W^\perp$ il complem. ortogonale rispetto a b. Dati $g \in G$, $u \in W^\perp$, $w \in W$ abb.:

$$b(g \cdot u, w) = b(g^{-1} \cdot g \cdot u, g^{-1} \cdot w) = b(u, \underbrace{g^{-1} \cdot w}_{\in W}) = 0$$

cioè $gu \in W^\perp$. Segue che $W^\perp$ è un sottomodulo, e basta porre $U = W^\perp$.

$\square$

Dim. teo.: Sia $\varphi : G \to GL(m, \mathbb{R})$ rappr., e sia b prod. scalare qualsiasi su $\mathbb{R}^m$. Rendiamo b G-stabile facendo una media, cioè def.

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \overbrace{\int_G b(g^{-1} \cdot v, g^{-1} \cdot w)\, dg} \end{aligned}$$

vuol dire la f. diff. $f\,dg$ dove $f(g) = b(g^{-1} \cdot v, g^{-1} \cdot w)$

Oss.: $b(g^{-1} \cdot v, g^{-1} \cdot w)$ è una f.ne continua e anche C^∞ su G, quindi l'integrale è ben definito. Chiaramente c è bilineare, ed è def. positiva perché

$$c(v,v) = \int_G b(g^{-1}v, g^{-1}v)\,dg$$

che è l'integrale di una f.ne strettam. positiva su G.

Ora c è G-stabile, verifichiamolo. Dato $h \in G$

vale

$$c(hv, hw) = \int_G b(g^{-1}hv, g^{-1}hw)\,dg = \int_G f(h^{-1}g)\,dg$$

$$\left(\text{cioè } \tilde{f} = L_g^*(f)\right)$$

che vuol dire più precisamente $\int_G \tilde{f}\,dg$ dove $\tilde{f}(g) = f(h^{-1}g)$.

Ora $\tilde{f}\,dg = L_{h^{-1}}^*(f\,dg)$ che si dim. facilmente usando $L_{h^{-1}}^*(dg) = dg$, da questo segue

$$\int_G \tilde{f}\,dg = \int_{\underbrace{L_h(G)}_{= G}} L_{h^{-1}}^*(f\,dg) = \int_G f\,dg = c(v,w)$$

da cui c è G-stabile. Grazie alla proposiz. precedente, segue φ completam. riducibile.

$\square$

Decomp. di J.-C. astratta in algebre di Lie semisemplici

Il nostro obiettivo a lungo termine è classificare le alg. di Lie semisemplici in termini di oggetti combinatorici chiamati sistemi di radici. Anticipiamo la costruzione di questi oggetti in un esempio.

$L = \mathfrak{sl}(3)$. Si considera $H = \mathfrak{h}(3)$, e oss. che

$$L = H \oplus ke_{12} \oplus ke_{23} \oplus ke_{13} \oplus ke_{21} \oplus ke_{32} \oplus ke_{31}$$

è decomp. di L in $ad(H)$-autospazi. Poi oss. che

$$[e_{12}, e_{21}] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = h_{12} \qquad [e_{23}, e_{32}] = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = h_{23}$$

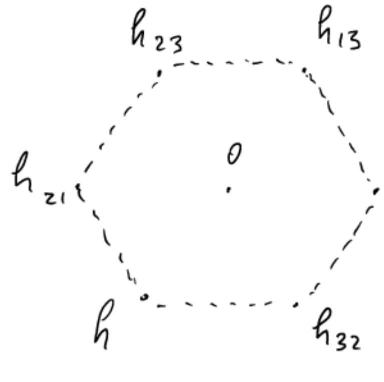
$$[e_{13}, e_{31}] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = h_{13},$$ e analogam.

$[e_{21}, e_{12}] = h_{21} = -h_{12}$, ecc...

Questi elem. generano a 3 a 3 delle sottoalgebre di Lie

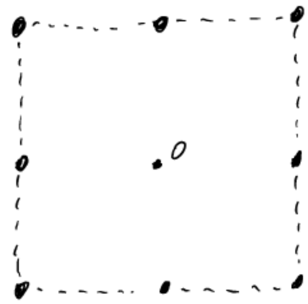
$$\mathrm{span}\{e_{ij}, h_{ij}, e_{ji}\} \cong \mathfrak{sl}(2) \quad (\forall i \neq j).$$

Infine, calcoliamo $\kappa_L(h_{ij}, h_{er})$, e <u>facciamo finta</u> che h_{ij} siano elem. di $\mathbb{R}^2$, e che $\kappa_L(h_{ij}, h_{er})$ sia il prodotto scalare standard. Vengono 6 pti di $\mathbb{R}^2$ in una config. particolare:



Sono i vertici di un esagono regolare!

Stessa costruz. con $L = sp(4)$ e $H = \mathfrak{h}(4) \cap L$: vengono 8 punti su un quadrato, i vertici e i punti medi dei lati:



Vogliamo riprodurre la stessa costruzione con L semisemplice qualsiasi, e per farlo dobbiamo:

1) trovare un analogo di H per L qualsiasi

2) trovare le sottoalgebre $\cong sl(2)$ e usare le loro proprietà per dim. che la configurazione dei punti che otterremo in $\mathbb{R}^n$ ha proprietà interessanti.

Strategia:

1) negli esempi, H è fatto da elem. <u>semisemplici</u>, per L qualsiasi l'analogo saranno elem. <u>ad-semisemplici</u>, ma avremo bisogno di studiarli a fondo.

2) le proprietà seguiranno pensando a L come un $sl(2)$-modulo, quindi dovremo studiare bene prima gli $sl(2)$-moduli.

Iniziamo preparandoci a studiare gli elem. ad-semisemplici.

<u>Teorema:</u> Se L è semisemplice allora $ad(L) = Der(L)$.

Per la dim. si usa:

<u>Oss.:</u> Dato $x \in L$ (qualsiasi) e $\delta \in Der(L)$, abb. $[\delta, ad(x)] = ad(\delta(x))$, che si verifica facilmente.

<u>Dim. teorema:</u> Sia L semisemplice, e osserviamo che $I := ad(L)$ è un ideale di $Der(L)$, grazie all'oss. precedente.

Vogliamo usare la forma di Killing su $Der(L)$ e studiare $I^\perp$.

Oss. che anche $ad(L)$ è semisemplice: non solo è imm. omomorfa, ma vale $Z(L) = \{0\}$ quindi $ad(L) \cong L$.

Perciò $K_I : I \times I \longrightarrow k$ è non degenere.

Ricordiamo anche $K_{Der(L)} = K_{Der(L)}\big|_{I \times I}$ per un lemma precedente.

Allora $I^\perp$ = ortogonale di I in $Der(L)$ risp. a $K_{Der(L)}$ soddisfa $I \cap I^\perp = \{0\}$, quindi $[I, I^\perp] = \{0\}$ (perché è cont. in entrambi).

Sia ora $\delta \in I^\perp$, abb. $[\delta, ad(x)] = 0$, da cui $ad(\delta(x)) = 0$,

$\forall x \in L$, da cui $\delta = 0$, cioè $I^\perp = \{0\}$. Ma da questo segue $Der(L) = I$, perché $\dim(I) \geq \mathrm{codim}_{Der(L)}(I^\perp)$ (essere che $I^\perp$ è descritto da un sistema di $\dim(I)$ equazioni). $\square$

<u>Def.</u>: Sia L alg. di Lie, e $x \in L$. Allora x si dice <u>ad-semisemplice</u> se $ad(x): L \to L$ è semisemplice

<u>Corollario</u>: Se L è semisemplice, c'è una decomp. di J.-C. „astratta", cioè $\forall x \in L \ \exists! \ x_s, x_n \in L \mid x = x_s + x_n$, x_s ad-semisemplice, x_n ad-nilpotente, e $[x_s, x_n] = 0$.

<u>Dim.</u>: Idea: dim. che $ad(x)_s, ad(x)_n \in ad(L)$, facendo vedere che $ad(x)_s \in Der(L)$ (e allora anche $ad(x)_n \in Der(L)$).

Decomp. $L = \bigoplus_{\alpha \in k} L_\alpha$ in autosp. gen. per $ad(x)$ ✓, poniamo $D = ad(x)_s$, $E = ad(x)$

sappiamo $D(v) = \alpha v \ \forall v \in L_\alpha$. Osserviamo prima di tutto che $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$, infatti dato $a \in L_\alpha$, $b \in L_\beta$, abb.

$$\left(E - (\alpha+\beta)\right)^m([a,b]) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left[(E-\alpha)^i a, (E-\beta)^{m-i} b\right] \overset{\text{che è } = 0}{\checkmark} \text{ se } m \text{ è abb. grande}$$

verifica elem. per induzione su m

(caso $m=1$: $(E-(\alpha+\beta))[a,b] = E([a,b]) - (\alpha+\beta)[a,b] = E([a,b]) - [\alpha a, b] - [a, \beta b]$

$E([a,b]) = [E(a), b] + [a, E(b)]$ quindi $(E - (\alpha+\beta))[a,b] =$

$= [E(a) - \alpha a, b] + [a, E(b) - \beta b] = [(E-\alpha)a, b] + [a, (E-\beta)b]$)

Allora $D([a,b]) = (\alpha+\beta)[a,b] = [\alpha a, b] + [a, \beta b] = [D(a), b] + [a, D(b)]$

e segue che D è una derivazione. Quindi $\exists x_s \mid ad(x_s) = ad(x)_s$, e

$\exists x_n = x - x_s \mid ad(x_n) = ad(x)_n$. Tutte le propr. volute di x_s, x_n valgono, infatti $ad([x_s, x_n]) = [ad(x)_s, ad(x)_n] = 0$ e ad è iniettiva, quindi $[x_s, x_n] = 0$.

Infine l'unicità: siano x'_s, x'_n con le stesse proprietà di x_n, x_s. Allora $ad(x) = ad(x'_s) + ad(x'_n)$, i due addendi commutano e sono rispett. semis. e nilpotente. Per l'unicità della decomp. standard in $gl(L)$, valgono $ad(x'_s) = ad(x)_s = ad(x_s)$ e $ad(x'_n) = ad(x)_n = ad(x_n)$, da cui $x'_s = x_s$ e $x'_n = x_n$ per l'iniettività di ad. $\square$

Compatibilità della decomp. astratta di J.-C. con le rappresentazioni

<u>Teorema</u>: Sia L semisemplice e $\varphi: L \to gl(V)$ rappres. Per ogni $x \in L$ vale

$$\varphi(x_s) = \underbrace{\varphi(x)_{s,std}}_{\text{decomp. di J.C. standard}} \qquad \varphi(x_n) = \varphi(x)_{n,std}$$

Per la dim.:

<u>Lemma</u> 1: Sia $T: V \to V$ endom. di uno sp. vett., e sia $W \subseteq V$ sottosp. vett. T-stabile. Scriviamo $T|_W: W \to W$. Allora

$$(T_{s,std})|_W = (T|_W)_{s,std}, \quad (T_{n,std})|_W = (T|_W)_{n,std}$$

Dim.: Sappiamo che $T_{s,std}(W) \subseteq W$ e analogam. per $T_{n,std}$.

Inoltre $T_{s,std}\big|_W$ è anch'esso semisemplice, e $T_{n,std}\big|_W$ è nilpotente.

Commutano, e la somma è $T\big|_W$, quindi il lemma segue dall'unicità della decomp. di J.-C. □

Lemma 2: Sia $\varphi : V \to W$ isomorfismo di sp. vett., e $T : V \to W$ endomorfismo. Allora $(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1} : W \to W)$

$$(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})_{s,std} = \varphi \circ T_{s,std} \circ \varphi^{-1}$$

$$(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})_{n,std} = \varphi \circ T_{n,std} \circ \varphi^{-1}$$

Dim.: Simile al precedente; $\varphi \circ T_{s,std} \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ T_{n,std} \circ \varphi^{-1}$ hanno le stesse proprietà di $T_{s,std}$ e $T_{n,std}$ rispettivamente, quindi sono le parti semis. e nilpot. di $\varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$ per l'unicità □

Lemma 3: Sia $T : V \to V$ endom. di sp. vett., e consid.

$$ad(T) : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Allora $ad(T_{s,std}) = ad(T)_{s,std}$ e $ad(T_{n,std}) = ad(T)_{n,std}$

Dim.: $ad(T) = \underbrace{ad(T_{s,std})}_{\text{semisemplice}} + \underbrace{ad(T_{n,std})}_{\text{nilpotente}}$ quindi il lemma segue di nuovo dall'unicità.

abb. già visto che un endom. nilpot. è ad-nilpot., e un endom. semis. è ad-semisemplice □

Dim. del teorema:

V è completam. riducibile, $V = V_1 \oplus \_ \oplus V_t$, (irriducibili) e

$L = L_1 \oplus \_ \oplus L_r$ (L_i = alg. di Lie semplice $\forall i$)

Abb.: $\forall x \in L$: $x = x_1 + \dots + x_r$ con $x_i \in L_i$ e gli addendi commutano, perché $[L_i, L_j] = 0$ se $i \neq j$. Segue dall'unicità della decomp. che

$$x_s = (x_1)_s + \dots + (x_r)_s \qquad \left((x_i)_s + (x_i)_n = x_i \text{ decomp. in } L_i\right)$$
$$x_n = (x_1)_n + \dots + (x_r)_n$$

perché $(x_1)_s, \dots, (x_r)_s$ commutano e sono ad-semisemplici, quindi la somma è ad-semisemplice, e analogam. vale per $(x_1)_n, \dots, (x_r)_n$.

Analogam. $\varphi(x)_{s,std} = \varphi(x_1)_{s,std} + \dots + \varphi(x_r)_{s,std}$

$$\varphi(x)_{n,std} = \varphi(x_1)_{n,std} + \dots + \varphi(x_r)_{n,std}$$

quindi basta dim. che $\varphi\left((x_i)_s\right) = \varphi(x_i)_{s,std}$ e $\varphi\left((x_i)_n\right) = \varphi(x_i)_{n,std}$ $\forall i$, cioè possiamo consid. ogni L_i separatamente. Quindi assumiamo L <u>semplice</u>.

Inoltre $\varphi(x)$, $\varphi(x_s)$, $\varphi(x_n)$ mandano V_i in V_i, e per il lemma 1 vale

$$\varphi(x)_{s,std}\Big|_{V_i} = \left(\varphi(x)\Big|_{V_i}\right)_{s,std} \qquad \forall i,$$

quindi se dimostriamo che $\left(\varphi(x)\Big|_{V_i}\right)_{s,std} = \varphi(x_s)\Big|_{V_i}$

allora $\varphi(x)_{s,std}$ coincide con $\varphi(x_s)$ su ogni V_i, quindi $\varphi(x)_{s,std} = \varphi(x_s)$. Analogam. per x_n e $\varphi(x)_{n,std}$.

Conseguenza: possiamo considerare ciascun V_i separatamente, quindi assumiamo L semplice e V irriducibile.
Inoltre possiamo assumere $\varphi(L) \neq 0$, cioè $\ker(\varphi) \neq L$, cioè $\ker(\varphi) = 0$ perché L è semplice. Cioè $\varphi : L \to \varphi(L)$ invertibile.

Consideriamo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "ad_L(x)"] & \varphi(L) \arrow[r, hook] \arrow[d, "ad(\varphi(x))|_{\varphi(L)}"] & gl(V) \arrow[d, "ad(\varphi(x))"] \\ L \arrow[r, "\varphi"] & \varphi(L) \arrow[r, hook] & gl(V) \end{tikzcd}$$

(notazione: $ad(y) : gl(V) \to gl(V)$
$ad_L(x) : L \to L$
per $y \in gl(V)$, $x \in L$)

$$ad(\varphi(x))\Big|_{\varphi(L)} : \varphi(L) \longrightarrow \varphi(L)$$

$$\underset{\text{con } z \in L}{u = \varphi(z)} \longmapsto [\varphi(x), u] = [\varphi(x), \varphi(z)] = \varphi([x, \underset{\varphi^{-1}(u)}{\underset{\shortparallel}{z}}])$$

Cioè $ad(\varphi(x))\Big|_{\varphi(L)} = \varphi \circ ad(x) \circ \varphi^{-1}$ e vale

$$\left(ad(\varphi(x))\big|_{\varphi(L)} \right)_{s,std} = \left(\varphi \circ ad(x) \circ \varphi^{-1} \right)_{s,std} \overset{\text{Lemma 2}}{=} \boxed{\varphi \circ ad(x)_{s,std} \circ \varphi^{-1}}$$

$\shortparallel$ ①

Inoltre $\left(ad(\varphi(x))\Big|_{\varphi(L)} \right)_{s,std} \underset{\text{Lemma 1}}{=} \boxed{\left(ad(\varphi(x))_{s,std} \right)\Big|_{\varphi(L)}}$

e $ad(x)_{s,std} \overset{②}{=} ad(x_s)$ per la def. di x_s.

Infine $ad(\varphi(x))_{s,std}\Big|_{\varphi(L)} \overset{③}{=} ad(\varphi(x)_{s,std})\Big|_{\varphi(L)}$ per il Lemma 3.

Concludiamo da ①, ② e ③: $\varphi \circ ad(x_s) \circ \varphi^{-1} = ad(\varphi(x)_{s,std})\Big|_{\varphi(L)}$

Concretamente: $\forall\, u \in \varphi(L)$ abb.

$$[\varphi(x)_{s,std}, u] = \varphi\left([x_s, \varphi^{-1}(u)]\right) = [\varphi(x_s), u]$$

Basta a concludere $\varphi(x)_{s,std} = \varphi(x_s)$?

Usiamo il lemma di Schur:

$$[\varphi(x)_{s,std} - \varphi(x_s), u] = 0 \quad \text{cioè } y = \varphi(x)_{s,std} - \varphi(x_s) \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$$

Allora y è uno scalare, calcoliamo la traccia. Abb. $\varphi(x_s) \in \varphi(L) = \varphi([L,L]) = [\varphi(L), \varphi(L)]$

quindi $tr(\varphi(x_s)) = 0$. D'altronde $\varphi(x)_{s,std}$ ha stessa traccia di $\varphi(x)$, che ha traccia nulla per lo stesso rag.. Allora y ha traccia nulla: segue $y=0$, quindi $\varphi(x_s) = \varphi(x)_{s,std}$. Stesso rag. per $\varphi(x_n) = \varphi(x)_{n,std}$. $\square$

Corollario: $\varphi(L)$ contiene $\varphi(x)_{s,std}$ e $\varphi(x)_{n,std}$ $\forall x \in L$.

Oss.: Il teorema vale anche per $L \subseteq gl(n)$ e $\varphi: L \hookrightarrow gl(n)$ l'inclusione, e dice che la decomp. astratta in $L \subseteq gl(n)$ semisemplice coincide con quella standard.

$sl(2)$-moduli

Sia V un $sl(2)$-modulo. Per l'ultima osservazione abbiamo $h_s = h$, da cui anche $\varphi(h) \in gl(V)$ è semisemplice.

Cioè V si decompone in autospazi per h:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in k} V_\alpha \qquad (V_\alpha = \{v \in V \mid h.v = \alpha v\})$$

Def.: Gli α tali che $V_\alpha \neq \{0\}$ si chiamano pesi di h su V, e i vettori in $V_\alpha \setminus \{0\}$ si dicono (auto-)vettori di peso α.

Lemma: $e.V_\alpha \subseteq V_{\alpha+2}$, $\quad f.V_\alpha \subseteq V_{\alpha-2}$

Dim.: Sia $v \in V_\alpha$, allora $h.e.v = [h,e].v + e.h.v =$

$$= 2e.v + e.\alpha v = (\alpha+2)e.v$$

$$h.f.v = [h,f].v + f.h.v = -2f.v + f.\alpha v = (\alpha-2)f.v.$$

$\square$

Es.: Ricordiamo l'azione di $\mathfrak{sl}(2)$ su $k[x,y]_d$: gli autovalori di h erano $d, d-2, d-4, \dots, -d+2, -d$, e in effetti e ed f si comportavano come nel lemma.

Def.: Sia $\alpha \in k$ tale che $V_\alpha \neq \{0\}$ ma $V_{\alpha+2} = \{0\}$. Allora i vettori di $V_\alpha \setminus \{0\}$ si dicono massimali, e vale $e.V_\alpha = \{0\}$.

Chiaramente $\dim(V)$ è finita quindi esistono vettori massimali.

Es.: Ric. la rappr. di $\mathfrak{sl}(2)$ su $k[x,y]_d$ vista negli esercizi: e agisce come $x\frac{\partial}{\partial y}$, f come $y\frac{\partial}{\partial x}$, h come $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$:

$$e.x^{d-i}y^i = i.x^{d-i+1}y^{i-1}, \quad f.x^{d-i}y^i = (d-i)x^{d-i-1}y^{i+1}$$

$$h.x^{d-i}y^i = (d-i-i)x^{d-i}y^i = (d-2i)x^{d-i}y^i$$

<u>Lemma:</u> Sia V un $sl(2)$-modulo, v_0 vettore massimale di peso λ ← analogo di x^d

Poniamo $v_{-1} = 0$, e $v_i = \underbrace{f^i . v_0}_{} = \underbrace{f.(f.\cdots f.(f.v))\ldots)}_{i \text{ volte } f}$

Allora $h.v_i = (\lambda - 2i)\, v_i$

$f.v_i = v_{i+1}$

$e.v_i = i(\lambda - i + 1)\, v_{i-1}$

(Nell'esempio avremmo $\lambda = d$,

$v_1 = d x^{d-1} y$, $v_2 = d(d-1) x^{d-2} y^2$

$\ldots\ v_i = \dfrac{d!}{(d-i)!} x^{d-i} y^i$.)

<u>Dim.:</u> h: dal lemma prec.

f: è la def. di v_{i+1}

$$e.v_i = e.\,f.\,v_{i-1} = \overbrace{[e,f]}^{h}.v_{i-1} + f.e.v_{i-1} \overset{\text{per induz. su } i}{=}$$

$$= (\lambda - 2(i-1))\, v_{i-1} + f.(\lambda - i + 2)(i-1)\, v_{i-2} =$$

$$= (\lambda - 2(i-1))\, v_{i-1} + (\lambda - i + 2)(i-1)\, v_{i-1} =$$

$$= \Big(\underbrace{\cancel{\lambda} - \cancel{2i} + \cancel{2} + i\lambda - \cancel{\lambda} - i^2 + i + \cancel{2i}}_{= i\lambda + i - i^2} - \cancel{2}\Big)\, v_{i-1} = i(\lambda - i + 1)\, v_{i-1}.$$

□

<u>Corollario:</u> $\lambda \in \mathbb{Z}$.

<u>Dim.:</u> f agisce in modo nilpotente quindi $\exists m \geq 0 \mid f^m . v_0 \neq 0$ e $f^{m+1} . v_0 = 0$

Allora $e.v_{m+1} = 0 = \overbrace{(m+1)}^{\neq 0}(\lambda - (m+1) + 1)\underbrace{v_m}_{\neq 0}$ allora $\lambda - m = 0$ cioè $\lambda = m$.

□

Teorema: Sia V un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo irriducibile, sia v_0 vettore massimale di peso λ. Allora $\lambda \in \mathbb{Z}$, e abbiamo:

1) V è lo span di $v_0, v_1, \dots$, ed è la somma diretta di spazi peso

$$V = \bigoplus_{i=0}^{\lambda} V_{\lambda - 2i} = V_\lambda \oplus V_{\lambda-2} \oplus \dots \oplus V_{-\lambda+2} \oplus V_{-\lambda} \quad (\text{ciascuno } \neq \{0\})$$

ciascuno di dim. 1.

2) V ha un unico vett. massimale a meno di multipli scalari, e il suo peso λ è il peso più alto.

3) L'azione di $\mathfrak{sl}(2)$ è data dalle formule del lemma, quindi V è univocam. determinato da λ a meno di isomorfismi. Denotiamo $V = V(\lambda)$.

Dim.: ovvia, ponendo $V_i = k v_i$. Il fatto che $V_{-\lambda} \neq \{0\}$ e $V_{-\lambda-2} = \{0\}$ segue dalla dim. del corollario, perché $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$, e $\lambda = m$. $\square$

Corollario: Se V è un $\mathfrak{sl}(2)$ modulo allora gli h-pesi sono tutti interi, e per ogni peso α abb. $\dim(V_\alpha) = \dim(V_{-\alpha})$. Inoltre decomponendo V in somma di irriducibili, il numero degli addendi è

$$\dim(V_0) + \dim(V_1).$$

Dim.: $V = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)$

e oss. che $V_\alpha = V(\lambda_1)_\alpha \oplus \_\_ \oplus V(\lambda_t)_\alpha$, inoltre $V(\lambda_i)_\alpha$ ha dim. 0 opp. 1, e in ogni caso $\dim(V(\lambda_i)_\alpha) = \dim(V(\lambda_i)_{-\alpha})$.

Infine se λ_i è dispari allora $V(\lambda_i)_1$ ha dim. 1 e $V(\lambda_i)_0 = \{0\}$, invece se λ_i è pari allora $V(\lambda_i)_0$ ha dim. 1 e $V(\lambda_i)_1 = \{0\}$.

$\square$

Esempio: Supp. V somma diretta di moduli irriduc. U, W, X, Y, Z. Ciascun addendo si decompone come nel teorema, in h-autospazi. Mettiamo:

$$U = U_2 \oplus U_0 \oplus U_{-2} \quad , \quad W = W_3 \oplus W_1 \oplus W_{-1} \oplus W_{-3}$$

$$X = X_0 \, , \quad Y = Y_1 \oplus Y_{-1} \, , \quad Z = Z_2 \oplus Z_0 \oplus Z_{-2}$$

(U ha peso più alto 2, $W \rightsquigarrow 3$, $X \rightsquigarrow 0$, $Y \rightsquigarrow 1$, $Z \rightsquigarrow 2$).

Allora V si decompone in somma diretta così: $V = (U_2 \oplus \ldots) \oplus (W_3 \oplus \ldots) \ldots$

cioè:

(peso 3)	(peso 2)	(peso 1)	(peso 0)	(peso -1)	(peso -2)	(peso -3)
	U_2		U_0		U_{-2}	
W_3		W_1		W_{-1}		W_3
			X_0			
		Y_1		Y_{-1}		
	Z_2		Z_0		Z_{-2}	

Ciascuno di questi ha dim. 1, e sommando quelli con lo stesso peso otteniamo un autosp. di V, es. $V_0 = U_0 \oplus X_0 \oplus Z_0$.

Sottoalgebre torali

<u>Def.</u>: Sia L alg. di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalgebra.

H si dice <u>torale</u> se $x = x_s \ \forall x \in H$.

<u>Es.</u>: $L \subseteq \mathfrak{gl}(n)$, allora $H = L \cap \mathfrak{h}(n)$ è torale.

<u>Lemma</u>: Se H è torale allora è abeliana.

<u>Dim.</u>: Sia $x \in H$, allora $\overset{ad(x): L \to L}{\vee}$ è diagonalizzabile. Allora anche

$ad(x)\big|_H : H \to H$ è diagonalizzabile, perché $ad(x)(H) \subseteq H$ cioè H è stabile per $ad(x)$.

Sia $(y_1, \dots, y_n)$ base di H di autovettori per $ad(x)$:

$$ad(x)(y_i) = \alpha_i y_i \quad , \qquad ad(y_i)(-x) = \alpha_i y_i$$

cioè $\alpha_i y_i \in Im(ad(y_i))$. Inoltre $\alpha_i y_i \in \ker(ad(y_i))$.
Ma il nucleo e l'immagine di un endom. diagonalizzabile hanno intersez. nulla (si veda anche il lemma prima della decomp. di Fitting). Allora

$$Im(ad(y_i)) \cap Ker(ad(y_i)) = \{0\}, \quad \text{cioè } \alpha_i = 0 \ \forall i. \qquad \square$$

Radici

Sia L alg. di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalgebra torale massimale. Allora tutti gli $ad(x)$ con $x \in H$ commutano, quindi si diagonalizzano simultaneamente.

Es.: $$sl(n) = \underbrace{h(n)}_{h(n) \text{ autosp. di autoval. } 0 \ \forall x \in h(n)} \oplus \bigoplus_{i \neq j} k\, e_{ij}$$

ciascuno è autovett. per $ad(x)$, con $x = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, di autovalore $\boxed{a_i - a_j}$

Ogni autovalore varia con $x \in H$, è quindi una funzione $H \to k$.

Lemma: Sia $y \in L$ autovettore di $ad(x)$ $\forall x \in H$, cioè $ad(x)(y) = \alpha(x) y$ $\forall x \in H$.
Allora $\alpha : H \to k$ è lineare.

Dim.: $\alpha(x) y = [x, y]$ che è lineare in x. $\square$

Dal Lemma segue:

$$L = \bigoplus_{\substack{\alpha \in H^* \\ \alpha \neq 0}} L_\alpha \oplus \underset{Z_L(H)}{\overset{\shortparallel}{L_0}}$$

dove $L_\alpha = \{ y \in L \mid ad(x)(y) = \alpha(x) y \quad \forall x \in H \}$

Def.: Se $\alpha \in H^* \setminus \{0\}$ con $L_\alpha \neq \{0\}$ allora α si dice <u>radice</u> di L rispetto alla sottoalgebra H.

Proposizione: 1) Il numero delle radici di L è finito.
Inoltre $\forall \alpha, \beta \in H^*$ valgono:

2) $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$

3) se $\alpha \neq 0$ e $x \in L_\alpha$ allora x è ad-nilpotente

4) se $\alpha + \beta \neq 0$ allora $L_\alpha \perp L_\beta$ (risp. a K_L).

Dim.: 1) è ovvio.

2) sia $h \in H$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$:

$$ad(h)([x,y]) = [ad(h)(x), y] + [x, ad(h)(y)] =$$

$$= \alpha[x,y] + \beta[x,y] = (\alpha+\beta)[x,y]$$

3) Segue da 2): data $\beta \in H^*$, $ad(x)^m(L_\beta) \subseteq L_{\beta+m\alpha}$ che è zero per $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ abb. grande (per 1)).

4) Prendo $h \in H$ tale che $\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$, allora

$$\alpha(h)K(x,y) = K([h,x],y) = -K([x,h],y) = -K(x,[h,y]) = -\beta(h)K(x,y)$$

cioè $(\alpha(h)+\beta(h))K(x,y) = 0$, da cui la tesi. $\square$

Obiettivo: dimostrare che $H = L_0$.

Corollario: $K|_{L_0 \times L_0}$ è non degenere.

Dim.: Sia $x \in \ker(K|_{L_0 \times L_0})$ cioè $K(x, L_0) = 0$, ma dalla proposiz.

sappiamo $K(x, L_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \neq 0$, cioè $K(x, L) = 0$, quindi $x = 0$.

$\square$

<u>Prop.</u>: $K|_{H\times H}$ è non degenere.

<u>Dim.</u>: Sia $x \in H \cap H^\perp$, dim. che $x \in L_0^\perp$, quindi sia $y \in L_0$, $y = y_s + y_n$ e oss. che $ad(y)(H) = \{0\}$, cioè i vettori di H sono tutti autovettori per $ad(y)$. Allora anche per $ad(y_s) =$ parte semis. di $ad(y)$, quindi $ad(y_s)(H) = \{0\}$ cioè $y_s \in L_0$. Allora $H + ky_s$ è una sottoalgebra torale, quindi $y_s \in H$. Ora

$$K(x,y) = K(x, y_s + y_n) = \underbrace{K(\overset{H^\perp}{x}, \overset{H}{y_s})}_{=0} + K(x, x_n) = tr\left(ad(x)\, ad(y_n)\right) = \ldots$$

D'altronde x e y commutano ($y \in L_0$) quindi anche $ad(x)$ e $ad(y)$, quindi anche $ad(x)$ e $ad(y)_n = ad(y_n)$, e allora $ad(x)ad(y_n)$ è nilpotente. Perciò $\ldots = 0$, cioè $x \in L_0^\perp$. Allora $x \in L_0 \cap L_0^\perp = \{0\}$, quindi $x = 0$.

Segue: $K|_{H\times H}$ è non degenere.

<u>Corollario (della dim.)</u>: Dato $y \in L_0$ vale $y_s \in H$, $[y_n, H] = \{0\}$, $y_n \in L_0 \cap H^\perp$.

<u>Dim.</u>: Come prima: $H + ky_s = H$ per massimalità di H, poi $y_n = \underset{L_0}{y} - \underset{H \subseteq L_0}{y_s} \in L_0$ infine $ad(x)ad(y_n)$ è nilpotente $\forall x \in H$. $\square$

<u>Corollario</u>: $H = L_0$

Dim.: Ric. $L_0 = Z_L(H)$. Naturalmente $H \subseteq L_0 = (H^\perp \cap L_0) \oplus H$ perché κ è nondeg. su H. Sia $y \in H^\perp \cap L_0$, dal corollario prec. sappiamo $y_n \perp H$, da cui

$$0 = \kappa(x, y) = \kappa(x, y_s) \qquad \forall x \in H, \text{ da cui } y_s = 0 \text{ cioè } y = y_n \text{ è ad-nilpot.}$$

Infine, dato $z \in L_0$ abb.

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(z)) = \underbrace{\operatorname{tr}(\underset{H^\perp}{\operatorname{ad}(y)}\ \underset{H}{\operatorname{ad}(z_1)})}_{=0} + \operatorname{tr}(\underset{H^\perp \cap L_0}{\operatorname{ad}(y)}\ \underset{H^\perp \cap L_0}{\operatorname{ad}(z_2)}) = \dots$$

Ora $H^\perp \cap L_0$ è fatto di elem. ad-nilpotenti, quindi la sua immagine in $\operatorname{ad}(L)$ è in $\mathfrak{b}^u(n)$ per qualche base di L. Segue $\dots = 0$. Ma allora $y \in L_0$ è ortogonale a tutto L_0, da cui $y = 0$. Cioè $L_0 = H$. $\square$

Esempio: $\mathfrak{sp}(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\tilde{A} \end{pmatrix} \;\middle|\; B, C \text{ simmetriche risp. alla diag. secondaria } \boxed{/} \right\}$

$\tilde{A}$: trasposta rispetto alla diag. secondaria

$$L = \mathfrak{sp}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & a & x & y \\ b & t_2 & z & x \\ u & s & -t_2 & -a \\ t & u & -b & -t_1 \end{pmatrix} \right\}$$

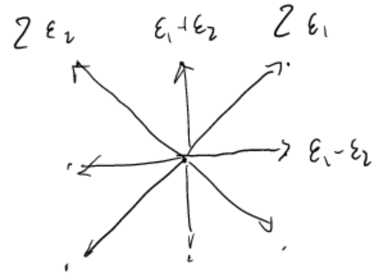
$H = \mathfrak{sp}(4) \cap \mathfrak{h}(4)$

radici $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (autosp. a)

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (x)

$2\varepsilon_1$ (y)

$2\varepsilon_2$ (z)



(Lunghezze e angoli: indotti dalla forma di Killing.)

Usiamo $\kappa_L = \kappa$ per identificare H e H^*, e poniamo su H^* la forma bil. indotta da κ_L:

$$t : H^* \xrightarrow{\cong} H$$

$$\alpha \longmapsto t_\alpha := \text{l'elem. di } H \text{ t.c. } \alpha(-) = \kappa(t_\alpha, -)$$

$$\kappa(t,-) \longleftarrow t$$

La forma bil. su H^* si denota sempre con κ, ed def. da

$$\underbrace{\kappa(\alpha,\beta)}_{\text{su } H^*} = \underbrace{\kappa(t_\alpha, t_\beta)}_{\text{su } H} \qquad \forall \alpha,\beta \in H^*$$

<u>Esempio</u> In $\mathfrak{sl}(n)$ le radici risp. a $H = \overbrace{\qquad}^{\mathfrak{sl}(n)\cap\mathfrak{h}(n)}$ sono $\boxed{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ $\left(\varepsilon_i \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = a_i\right)$

l'autosp. corrispondente è ke_{ij} $(i \neq j)$

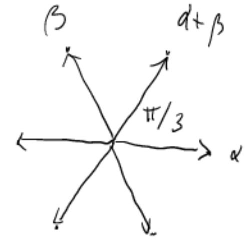
Calcoliamo $\kappa(\alpha,\alpha)$ con $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Abb.: t_α è tale che

$\kappa(t_\alpha, -) = \alpha(-)$, da questo $t_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n} & & & & \\ & \frac{-1}{2n} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $\kappa(\alpha,\alpha) = \dfrac{1}{2n^2}$

e $\kappa(\alpha, \overbrace{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}^{\beta}) = \dfrac{-1}{4n^2}$

cioè ke_{12} è l'autosp. di radice α

Es. in $\mathfrak{sl}(3)$: $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\alpha} & \alpha+\beta \\ -\alpha & 0 & \beta \\ -\alpha-\beta & -\beta & 0 \end{pmatrix}$



$$\kappa(\alpha,\beta) = \frac{-1}{4\cdot 9} \qquad \kappa(\alpha,\alpha) = \kappa(\beta,\beta) = \frac{2}{4\cdot 9}$$

Sia $\Phi = \{$radici di L risp. a $H\}$.

<u>Proposizione</u>. 1) Φ genera H^*

$\forall \alpha \in \Phi$:

2) $-\alpha \in \Phi$

più precisamente:

3) $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = \mathbb{k} t_\alpha$, $\forall x \in L_\alpha, \forall y \in L_{-\alpha}$: $[x, y] = \kappa(x, y) t_\alpha$

4) $\alpha(t_\alpha)\ (= \kappa(\alpha, \alpha)) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Phi$

5) $\forall e_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\} \quad \exists f_\alpha \in L_{-\alpha}$ tale che

$$\begin{aligned} e_\alpha &\longmapsto e \\ h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] &\longmapsto h \\ f_\alpha &\longmapsto f \end{aligned}$$

è un isom. di alg. di Lie $(S_\alpha :=) \operatorname{span}\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2)$

6) Per e_α come sopra: $\quad h_\alpha = \dfrac{2 t_\alpha}{\kappa(\alpha, \alpha)}$, $\quad h_\alpha = -h_{-\alpha}$, $\alpha(h_\alpha) = 2$.

<u>Dim.</u>: 1) Sia $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ base di $\operatorname{Span} \Phi$ $(\subseteq H^*)$. Consid.

$\ker \subseteq H$

l'intersez. $\ker(\alpha_1) \cap \dots \cap \ker(\alpha_m) =$

$= \{$ soluz. di un sistema omogeneo di m equaz. lin. indip. in n incognite, dove $n = \dim(H)$ $\}$ ha dim. $= \dim(H) - m$

Dato $h \in \ker(\alpha_1) \cap \dots \cap \ker(\alpha_m)$ abb. $h \in \ker(\alpha)\ \forall \alpha \in \Phi$, e allora

$[h, H] = 0$ e $[h, L_\alpha] = 0 \quad \forall \alpha \in \Phi$, quindi $h \in Z(L)$,

da cui segue $h = 0$, perciò $m = \dim(H)$.

2) Sia $\alpha \in \Phi$, sappiamo $L_\alpha \perp L_{\neq -\alpha}$. Se $L_{-\alpha} = \{0\}$

allora $L_\alpha \perp L$: assurdo.

3) Sia $h \in H$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$

$$\kappa(h, [x,y]) = \kappa([h,x], y) = \alpha(h)\,\kappa(x,y) = \kappa(t_\alpha, h)\,\kappa(x,y) =$$

$$\kappa\big(h,\ \kappa(x,y)\, t_\alpha\big)$$

e allora $[x,y] = \kappa(x,y)\, t_\alpha$.

4) Supp. $\alpha(t_\alpha) = 0$, cioè $ad(t_\alpha)(L_\alpha) = \{0\}$. Anche $-\alpha(t_\alpha) = 0$,

da cui $ad(t_\alpha)(L_{-\alpha}) = \{0\}$. Consid. allora $e_\alpha \in L_\alpha$, $f \in L_{-\alpha}$ tali che

$\kappa(e_\alpha, f) = 1$ (da cui $[e_\alpha, f] = t_\alpha$) e consid. la sottoalg. di Lie $R = Span\{e_\alpha, f, t_\alpha\}$.

Va isomorficamente in $ad(L)$, ed è risolubile (persino nilpotente) perché $[R,R] = k\, t_\alpha$

(infatti $[t_\alpha, e_\alpha] = \alpha(t_\alpha) e_\alpha = 0$ e analogam. con f), e $[R,[R,R]] = 0$.

Quindi c'è una base di L in cui $ad(e_\alpha)$, $ad(f)$, $ad(t_\alpha) \in \mathfrak{b}$ e $ad(t_\alpha) \in \mathfrak{b}^u(\dim(L))$

assurdo.

5) Dato $e_\alpha \in L_\alpha$ scegliamo $f_\alpha \in L_\alpha$ tale che $\kappa(e_\alpha, f_\alpha) = \dfrac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}$ e

poniamo $h_\alpha = \dfrac{2 t_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)}$, allora $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$, e $[h_\alpha, e_\alpha] =$

$$\frac{2[t_\alpha, e_\alpha]}{\kappa(\alpha,\alpha)} = \frac{2\,\cancel{\alpha(t_\alpha)}}{\cancel{\alpha(t_\alpha)}}\, e_\alpha = 2 e_\alpha$$

Analogamente: $[h_\alpha, f_\alpha] = -2 f_\alpha$.

6) Formula per h_α data in 5). $t_\alpha = -t_{-\alpha}$ e $\kappa(-\alpha,-\alpha) = \kappa(\alpha,\alpha)$

quindi $h_\alpha = -h_{-\alpha}$, e $\alpha(h_\alpha) = \dfrac{2\alpha(t_\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = \dfrac{2\alpha(t_\alpha)}{\alpha(t_\alpha)} = 2$.

Prop.: 1) Data $\alpha \in \Phi$, abb. $\dim(L_\alpha) = 1$,

$$S_\alpha = L_\alpha \oplus L_{-\alpha} \oplus k\, h_\alpha$$

e dati e_α, h_α, allora f_α è unico.

2) Se $\alpha \in \Phi$, $c\alpha \in \Phi$ con $c \in k$ allora $c \in \{1, -1\}$.

3) Date $\alpha, \beta \in \Phi$ vale $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$

4) Date $\alpha, \beta \in \Phi$ con $\alpha + \beta \neq 0$ abb. $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$

5) Date $\alpha, \beta \in \Phi$ con $\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha \neq \beta$, siano r, q massimi interi tali che $\beta + q\alpha$, $\beta - r\alpha \in \Phi$. Allora $r, q \geq 0$ e

$$\beta + q\alpha,\ \beta + (q-1)\alpha, \dots, \beta + \alpha,\ \beta,\ \beta - \alpha, \dots, \beta - (r-1)\alpha,\ \beta - r\alpha \in \Phi$$

e $r - q = \beta(h_\alpha)$.

6) L è generata dagli L_α, cioè se $\tilde{L} \subseteq L$ è una sottoalg. di Lie cont. L_α $\forall \alpha \in \Phi$ allora $L = \tilde{L}$.

Dim.: Fissiamo $\alpha \in \Phi$ e $S_\alpha = \operatorname{span}\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\}$ come nella prop. prec.
Consid. L come $S_\alpha = \mathfrak{sl}(2)$-modulo sotto l'azione aggiunta, e

$$M = H \oplus \bigoplus_{c \in k \setminus \{0\}} L_{c\alpha}$$

è un S_α-sottomodulo. I pesi di h_α sono interi, e sono $= 0$ su H.
Il peso di h_α su $L_{c\alpha}$ è $c\alpha(h_\alpha) = 2c$, da cui $2c \in \mathbb{Z}$.

Vediamo meglio la struttura di H: $H = \ker(\alpha) \oplus k \cdot h_\alpha$
su cui α fa 2

D'altronde $\ker(\alpha)$ è un S_α-sottomodulo, perché $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$ e $[h, f_\alpha] = -\alpha(h) f_\alpha$ $\forall h \in H$.

Anche S_α è un sottomodulo (S_α è una sottoalgebra!) quindi

$$M \supseteq \ker(\alpha) \oplus S_\alpha \supseteq H$$

Prendiamo un supplementare S_α-stabile: $M = (\ker(\alpha) \oplus S_\alpha) \oplus M'$.

I pesi di h_α su M' sono tutti dispari, perché ogni autovettore di h_α-peso zero è in $\ker(\alpha)$.

Ma allora i soli pesi pari di M sono $\underset{\text{peso di } e_\alpha}{2}, 0, \underset{\text{peso di } f_\alpha}{-2}$.

In particolare, $2\alpha \notin \Phi$, altrim. $e_{2\alpha}$ avrebbe h_α-peso 4.

Quindi nessuna radice è il doppio di una radice, da cui se $L_{c\alpha} \neq \{0\}$ allora $c \neq \frac{1}{2}$.

Segue: il peso 1 di h_α non compare in M, per cui non compare alcun peso dispari, perciò $M = \ker(\alpha) \oplus S_\alpha$ e vale 2).

Inoltre allora $L_\alpha \subseteq S_\alpha$, cioè $\dim(L_\alpha) = 1$, e vale 1).

Per gli altri, vediamo come agisce S_α sugli L_β con $\beta \notin \{\pm\alpha, 0\}$.

Abb.

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_{\beta + i\alpha} \quad \text{é un } S_\alpha\text{-sottomodulo.}$$

Qui gli h_α-pesi sono $\{\beta(h_\alpha) + 2i \mid i \in \mathbb{Z}, \ \beta + i\alpha \in \Phi\}$

I pesi 0 e 1 non appaiono mai contemporaneamente, e $\forall i$ il peso $2i + \beta(h_\alpha)$ compare solo in $L_{\beta + i\alpha}$ che ha dim. 1. Quindi N è irriducibile per S_α, e allora i suoi pesi sono una stringa dal più alto al suo opposto:

$\{m, m-2, \dots, -m+2, -m\} = \{\beta(h_\alpha)+2i \mid \beta+i\alpha \in \Phi\}$ cioè $\exists q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

tali che $\beta+q\alpha, \beta+(q-1)\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta-(r-1)\alpha, \beta-r\alpha \in \Phi$. Inoltre

$\beta(h_\alpha)+2q = -(\beta(h_\alpha)-2r)$ cioè $\beta(h_\alpha) = r-q \in \mathbb{Z}$, e

$\beta-\beta(h_\alpha)\alpha = \beta-(r-q)\alpha = \beta+(q-r)\alpha$ e visto che $-r \leq -r+q \leq q$

abb. $\beta-\beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. Cioè valgono 3) e 5).

Inoltre $[e_\alpha, L_{\beta+i\alpha}] = \begin{cases} L_{\beta+(i+1)\alpha} & \text{se } \beta+(i+1)\alpha \in \Phi \\ \{0\} & \text{altrimenti, e in questo caso } L_{\beta+(i+1)\alpha} = \{0\} \end{cases}$

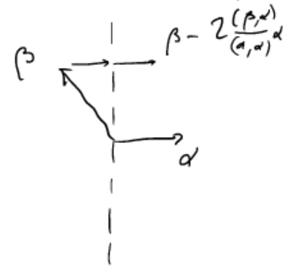
da cui $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$, cioè 4).

Infine, 6) segue dal fatto che $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$ e H è gen. dagli h_α (perché H^* è gen. da Φ).

$\square$

<u>Oss.</u>: $\beta(h_\alpha) = \dfrac{2\beta(t_\alpha)}{K(\alpha,\alpha)} = \dfrac{2K(\beta,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}$

Il vettore $\beta - \dfrac{2K(\beta,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}\alpha$ è il riflesso di β rispetto all'iperpiano ortogonale ad α



Sia ora $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ base di H^* fatta di radici.

<u>Lemma</u>: $\Phi \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Dim.: Per trovare i coeff. di $\alpha \in \Phi$ rispetto ad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n$$

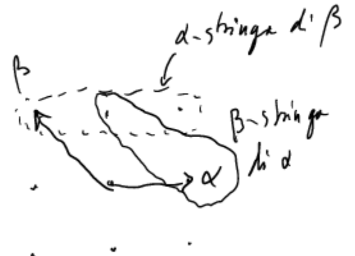
facciamo $\dfrac{2K(-, \alpha_i)}{K(\alpha_i, \alpha_i)}$:

$$\frac{2K(\alpha, \alpha_i)}{K(\alpha_i, \alpha_i)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{2K(\alpha_i, \alpha_j)}{K(\alpha_j, \alpha_j)} c_j$$

E' un sistema di n eq. in n incognite a coeff. in $\mathbb{Z}$, e la matrice $\left(K(\alpha_i, \alpha_j)\right)_{i,j}$ è invertibile, quindi anche $\left(\dfrac{2K(\alpha_i, \alpha_j)}{K(\alpha_j, \alpha_j)}\right)_{i,j}$ perché è ottenuta riscalando le colonne.

Quindi $c_j \in \mathbb{Q}$ $\forall j$. $\square$

Esempio:



$\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$\beta = 2\varepsilon_2$

base di H: $z_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & 0 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad z_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Radici $\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta$. Per $z \in H$:

$$ad(z) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & \alpha(z) & & & & & \\ & & & \beta(z) & & & & \\ & & & & (\alpha+\beta)(z) & & & \\ & & & & & (2\alpha+\beta)(z) & & \\ & & & & & & -\alpha(z) & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ad}(z_1) = \mathrm{diag}(0,0,1,0,1,2,-1,0,-1,-2) \qquad \mathrm{ad}(z_2) = \mathrm{diag}(0,0,-1,2,1,0,1,-2,-1,0,-1).$$

Quindi $K(z_1, z_1) = 12$, $\quad K(z_1, z_2) = 0$, $\quad K(z_2, z_2) = 12$

Ora, $\alpha(az_1 + bz_2) = a - b = K(t_\alpha, az_1 + bz_2)$, $\qquad \beta(az_1 + bz_2) = 2b = K(t_\beta, -)$

da cui
$$t_\alpha = \begin{pmatrix} 1/12 & & & \\ & -1/12 & & \\ & & 1/12 & \\ & & & -1/12 \end{pmatrix} \qquad t_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{6} & & \\ & & -\frac{1}{6} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(t_\alpha) = \frac{1}{6} \qquad \beta(t_\beta) = \frac{1}{3}, \quad h_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad h_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha(h_\alpha) = \beta(h_\beta) = 2$, $\quad \beta(h_\alpha) = -2 \quad$ e $\quad \beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta + 2\alpha \in \Phi$

$\alpha(h_\beta) = -1$, $\quad$ e $\quad \alpha - \alpha(h_\beta) = \alpha + \beta \in \Phi$.

Def.: Poniamo $E_\mathbb{Q} = \mathrm{Span}_\mathbb{Q}\, \Phi \quad \left(= \mathrm{Span}_\mathbb{Q}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \right)$

base di H^* di elem. di Φ

e anche $E = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} E_\mathbb{Q} \qquad$ ($\otimes_\mathbb{Q}$ = prodotto tensoriale di spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$)

Oss.: 1) $\dim_\mathbb{Q}(E_\mathbb{Q}) = \dim_k H^*$ perché entrambi hanno base $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

2) E è uno sp. vett. reale: la somma è def. perché è uno sp. vett. su $\mathbb{Q}$, e il prod. con a reale è indotto da $a \cdot (b \otimes_\mathbb{Q} v) = (ab) \otimes_\mathbb{Q} v$.

Esercizio: I vettori $1 \otimes_\mathbb{Q} \alpha_1, \dots, 1 \otimes_\mathbb{Q} \alpha_n$ formano una base (su $\mathbb{R}$) di E, da cui $\dim_\mathbb{R} E = \dim_\mathbb{Q} E_\mathbb{Q}$. (Identif. questi vett. con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nel seguito.)

Teorema: $K(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}$ $\forall \alpha,\beta \in \Phi$, quindi induce un'appl. $\mathbb{Q}$-bil.

$E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ e un'appl. $\mathbb{R}$-bilineare $\boxed{\text{denotiamolo } (-,-)}$

$E \times E \to \mathbb{R}$. Quest'ultima è un prodotto scalare, con cui E diventa uno spazio euclideo. Valgono inoltre:

1) Φ genera E (come sp. vett. su $\mathbb{R}$) e $0 \notin \Phi$

2) $\forall \alpha \in \Phi$: $\mathbb{Z}\alpha \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

3) $\forall \alpha,\beta \in \Phi$: $\beta - \dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$

4) $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$

Dim.: Ripartiamo da L e H^*. Scegliamo una base $(h_1,\dots,h_\ell,x_1,\dots,x_m)$ di L dove $(h_1,\dots,h_\ell)$ è una base di H, e $x_i \in L_{\beta_i}$ dove $\Phi = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$.

Allora dati $\lambda,\mu \in H^*$: $\kappa(\lambda,\mu) = \kappa(t_\lambda,t_\mu) = tr(ad(t_\lambda)ad(t_\mu)) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \beta_i(t_\lambda)\beta_i(t_\mu) = \dots$$

perché $ad(t_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \beta_1(t_\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_m(t_\lambda) \end{pmatrix}$

$$\ldots = \sum_{\alpha \in \Phi} \kappa(\alpha, \lambda)\kappa(\alpha, \mu)$$

Allora $\kappa(\lambda, \lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} \kappa(\lambda, \alpha)^2 \quad \forall \lambda \in H^*$. Con $\lambda = \beta \in \Phi$:

$$\frac{1}{\kappa(\beta, \beta)} = \sum_{\alpha \in \Phi} \left(\frac{\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\beta, \beta)} \right)^2 \in \mathbb{Q}, \text{ cioè } \kappa(\beta, \beta) \in \mathbb{Q} \ \forall \beta \in \Phi.$$

Da questo segue $\kappa(\beta, \alpha) \left(= \frac{\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\beta, \beta)} \cdot \kappa(\beta, \beta) \right) \in \mathbb{Q} \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi$.

Ma allora $\kappa(\lambda, \lambda)$ è somma di quadrati in $\mathbb{Q}$ $\forall \lambda \in E_{\mathbb{Q}}$

$$\kappa(\lambda, \lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in E_{\mathbb{Q}}$$

Inoltre $\kappa|_{E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}}}$ è nondeg., perché ha la stessa matrice di $\kappa|_{H \times H}$. Quindi induce un prod. scalare su E. Le altre proprietà 1) - 4) le abb. già viste.

$\square$

SISTEMI DI RADICI

Sia E uno sp. euclideo, prod. scalare $(-,-)$.

<u>Def.</u>: Un sottoinsieme finito non vuoto $\Phi \subseteq E$ si dice <u>sistema di radici</u> se valgono le proprietà 1) - 4) del teorema precedente.

<u>Def.</u>: Dato $\alpha \in E \setminus \{0\}$, definiamo
$$\alpha^\vee : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta \longmapsto \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},$$
cioè $\alpha^\vee \in E^*$,

e
$$s_\alpha : E \longrightarrow E, \quad \beta \longmapsto \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$

Dato $\eta \in E^*$, scriviamo $\langle \alpha, \eta \rangle = \eta(\alpha)$, quindi $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$

<u>Oss.</u>: 1) Att.: può succedere $(\alpha+\gamma)^\vee \neq \alpha^\vee + \gamma^\vee$, cioè $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ <u>non</u> è lineare (e $0^\vee$ <u>non</u> è definito).

2) $s_\alpha(\beta)$ è il „riflesso" di β risp. all'iperpiano $\alpha^\perp$ ortogonale ad α.

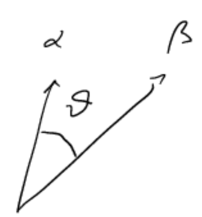
<u>Esempi</u>: 1) Esagono regolare e 8 punti sul quadrato, come visto da $\mathfrak{sl}(3)$ e $\mathfrak{sp}(4)$.

2) se $\dim(E) = 1$ prendiamo $\alpha \in E \setminus \{0\}$ e $\Phi = \{\pm\alpha\}$

<u>Esercizio</u>: Se $\dim(E) = 1$ allora $|\Phi| = 2$.

Vediamo i possibili valori di $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ con $\alpha, \beta \in \Phi$. Abb.

$$\underset{0}{\overset{}{c}} \geq \ldots \quad c = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \cdot \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 4 \underbrace{\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \cdot \frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}}_{= \cos^2(\vartheta)} \leq 4 \text{ per Cauchy-Schwarz.}$$

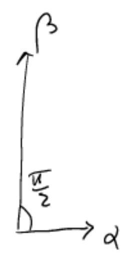


<u>Possibilità</u>: supponiamo α, β non proporzionali, $(\alpha,\beta)\geq 0$, $\|\beta\|\geq\|\alpha\|$ da cui

$$\langle \beta, \alpha^\vee\rangle \geq \langle \alpha, \beta^\vee\rangle \qquad \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee\rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee\rangle}$$

	c	$\langle\beta,\alpha^\vee\rangle$	$\langle\alpha,\beta^\vee\rangle$	ϑ	$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$	$\|\alpha\|=\|\beta\|$	
$(\cos(\theta)=0)$	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	?	?	
$\left(\cos(\theta)=\frac{1}{2}\right)$	1	1	1	$\frac{\pi}{3}$	1	sì	$\cos^2(\theta)=\frac{1}{4}$
$\left(\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	2	2	1	$\frac{\pi}{4}$	2	no	$\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}$
$\left(\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	3	3	1	$\frac{\pi}{6}$	3	no	$\cos^2(\theta)=\frac{3}{4}$
$(\cos(\theta)=1)$	4	escluso perché α e β sarebbero proporzionali					

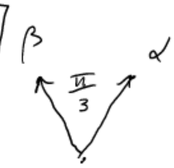
<u>$c=0$</u>



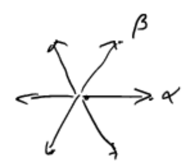
Allora Φ contiene

che si chiama $\boxed{A_1\times A_1}$

<u>$c=1$</u>

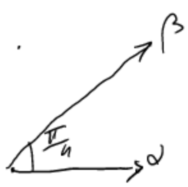


$\Phi \supseteq$

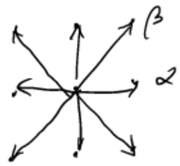


$= \boxed{A_2}$

<u>$c=2$</u>

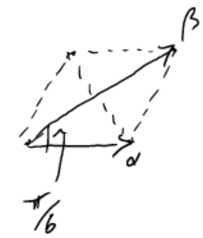


$\Phi \supseteq$



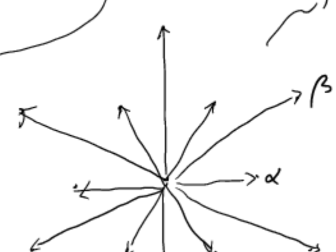
$= \boxed{B_2}$

<u>$c=3$</u>



= equilatero

$\Phi \supseteq$



$= \boxed{G_2}$

<u>Corollario</u> (di queste possibilità) 1) $\Phi \cap \mathrm{Span}\{\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$, e date $\alpha, \beta \in \Phi$ non propor. vale 2) $\Phi \cap \mathrm{Span}\{\alpha,\beta\}$ = una di queste 4 figure $A_1\times A_1$, A_2, B_2, G_2.

<u>Dim.</u>: 1) esercizio. 2) Poss. assumere l'angolo fra α e β minimo $(\neq 0)$ e usare la tabella. □

 <u>Lemma</u>: Siano $\alpha, \beta \in \Phi$ non proporzionali. Se $(\alpha,\beta)>0$ allora

$\alpha-\beta\in\Phi$; se $(\alpha,\beta)<0$ allora $\alpha+\beta\in\Phi$

Dim.: La seconda deriva dalla prima, dim. la prima. Se $(\alpha,\beta)>0$ allora $\langle\beta,\alpha^\vee\rangle>0$ e sappiamo che in questo caso $1\in\{\langle\beta,\alpha^\vee\rangle,\langle\alpha,\beta^\vee\rangle\}$ quindi $\alpha-\langle\alpha,\beta^\vee\rangle\beta=\alpha-\beta$ opp $\beta-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle\alpha=\beta-\alpha$.

□

Corollario: Date $\alpha,\beta\in\Phi$ non proporzionali, siano $r,q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ massimi tali che $\beta+q\alpha$, $\beta-r\alpha\in\Phi$. Allora $\beta+q\alpha,\beta+(q-1)\alpha,\dots,\beta-(r-1)\alpha,\beta-r\alpha$ sono in Φ, e $r-q=\langle\beta,\alpha^\vee\rangle$.

Dim.:

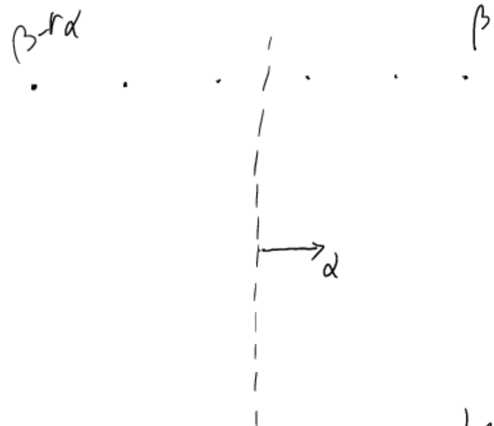
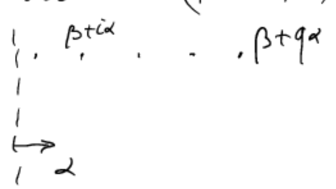


Abb. $\Phi\ni s_\alpha(\beta+q\alpha)=$

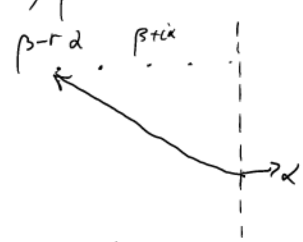
$$=\beta+q\alpha-\langle\beta+q\alpha,\alpha^\vee\rangle\alpha=$$
$$=\beta+(q-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle-2q)\alpha$$
$$=\beta+\underbrace{(-q-\langle\beta,\alpha^\vee\rangle)}_{=-r}\alpha \Rightarrow r-q=\langle\beta,\alpha^\vee\rangle$$

Se $r=q=0$, allora $\alpha\perp\beta$ per il Lemma e abb. finito.

Altrimenti $r>0$ oppure $q>0$, e ci sono in Φ vettori del tipo $\beta+i\alpha$ con $(\beta+i\alpha,\alpha)\neq 0$. Se $\exists i \mid (\beta+i\alpha,\alpha)>0$ e $\beta+i\alpha\in\Phi$ allora $(\beta+r\alpha,\alpha)>0$, e per il lemma sono in Φ anche $\beta+(q-1)\alpha$, $\beta+(q-2)\alpha$, … fino all'ultimo che ha prod. scalare ≥ 0 con α.



Se $\exists i \mid (\beta+i\alpha,\alpha)<0$ e $\beta+i\alpha\in\Phi$, allora $(\beta-r\alpha,\alpha)<0$ e per il lemma sono in Φ anche $\beta-(r-1)\alpha$, $\beta-(r-2)\alpha$, …. fino all'ultimo che ha prod. scalare ≤ 0 con α.



□

Def.: $\Delta \subseteq \Phi$ si dice <u>base</u> di Φ se

1) Δ è una base di E

2) $\forall \alpha \in \Phi$: i coeff. di α rispetto a Δ sono tutti ≥ 0 opp. tutti ≤ 0

Gli elem. di Δ si chiamano radici <u>semplici</u>, e le radici si distinguono in <u>positive</u> (Φ^+) se i loro coeff. sono ≥ 0, e <u>negative</u> (Φ^-) se i coeff. sono ≤ 0. Si scrive $\alpha > 0$ se $\alpha \in \Phi^+$, $\alpha < 0$ se $\alpha \in \Phi^-$.
Le riflessioni s_α con $\alpha \in \Delta$ si chiamano <u>riflessioni semplici</u>.

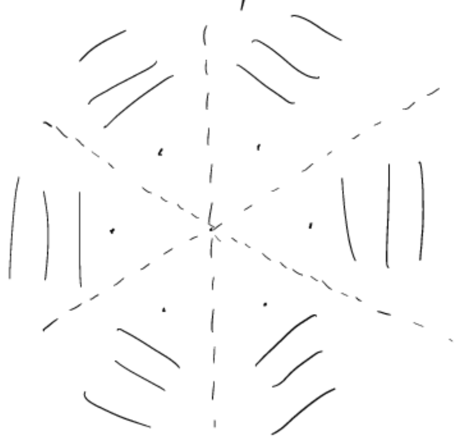
Es.:

Dimostriamo che le basi esistono.

Def.: 1) Gli elem. di $E^{reg} = E \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp \right)$ si dicono <u>regolari</u>.

2) Le comp. connesse di E^{reg} si dicono <u>camere di Weyl</u>.

Es.:



6 camere di Weyl

3) Dato γ vettore regolare, definiamo

$\Phi^+(\gamma) = \{ \alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0 \}$, analog $\Phi^-(\gamma)$,

$\Delta(\gamma) = \{ \alpha \in \Phi^+ \mid \alpha$ <u>indecomponibile</u> in $\Phi^+(\gamma)$, cioè non si può scrivere come $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ con $\alpha_i \in \Phi^+(\gamma)\ \forall i \}$.

<u>Proposizione</u>: $\forall \gamma \in E^{reg}$; $\Delta(\gamma)$ è una base.

<u>Dim.</u>: 1) Ogni elem. di $\Phi^+(\gamma)$ si scrive come comb. lin. di elem. di $\Delta(\gamma)$ a coeff. ≥ 0. Infatti, supp. per assurdo che $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ non si possa scrivere così, allora $\alpha \notin \Delta(\gamma)$. Poss. supporre α tale che (α, γ) sia minimo, inoltre α è decomp., quindi $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ con $\alpha_i \in \Phi^+(\gamma)$, e allora $\underbrace{(\gamma, \alpha_1)}_{>0} + \underbrace{(\gamma, \alpha_2)}_{>0} = \underbrace{(\gamma, \alpha)}_{>0}$

quindi $(\gamma, \alpha_i) < (\gamma, \alpha)$: per minimalità α_1 e α_2 sono comb. lin. di elem. di $\Delta(\gamma)$ a coeff. ≥ 0, ma allora anche α: assurdo.

2) Siano $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ con $\alpha \neq \beta$, dim. che $(\alpha, \beta) \leq 0$. Se $(\alpha, \beta) > 0$ allora $\alpha - \beta$, $\beta - \alpha \in \Phi$, e una di esse è in $\Phi^+(\gamma)$. Allora

$\alpha = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\in \Phi^+(\gamma)} + \beta$ opp. $\beta = \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\in \Phi^+(\gamma)} + \alpha$ è decomponibile: assurdo

3) Dim. che $\Delta(\gamma)$ è lin. indipend.. Sia $\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} c_\alpha \alpha = 0$ con $c_\alpha \in \mathbb{R}$,

allora $\sum_{c_\alpha > 0} c_\alpha \alpha = \sum_{c_\beta < 0} (-c_\beta) \beta = \eta$. Vale

$$(\eta, \eta) = \left(\sum_{c_\alpha > 0} c_\alpha \alpha, \sum_{c_\beta < 0} (-c_\beta) \beta \right) = \sum_{\substack{c_\alpha > 0 \\ c_\beta < 0}} \overbrace{-c_\alpha c_\beta}^{\geq 0} \overbrace{(\alpha, \beta)}^{\leq 0} \leq 0$$

quindi $\eta = 0$. Segue

$$0 = (\gamma, \eta) = \sum_{c_\alpha > 0} \underset{0}{\overset{\vee}{c_\alpha}} \underset{0}{\overset{\vee}{(\gamma, \alpha)}} = \sum_{c_\beta < 0} \underset{0}{\overset{\vee}{(-c_\beta)}} \underset{0}{\overset{\vee}{(\gamma, \beta)}}$$

da cui $c_\alpha = 0 \;\; \forall \alpha \in \Delta(\gamma)$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Esistono basi di Φ.

<u>Dim.</u>: $E^{reg} \neq \{0\}$ (dim.: esercizio. Svolgim.: fissiamo $\alpha \in \Phi$ e consid. $\beta^\vee|_{\alpha^\perp}$ per ogni $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$: è un funzionale non nullo, quindi per induz. $\underbrace{\text{}}_{\text{su } \dim(E)}$ $\exists \gamma_0 \in \alpha^\perp \mid (\gamma_0, \beta) \neq \{0\} \;\; \forall \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$, ora $\langle \gamma_0 + t\alpha_0, \alpha_0^\vee \rangle = 2t$, $\langle \gamma_0 + t\alpha_0, \beta^\vee \rangle = \langle \gamma_0, \beta^\vee \rangle + t \langle \alpha_0, \beta^\vee \rangle$. Per $t > 0$ piccolo abbastanza, $\gamma_0 + t\alpha_0 \in E^{reg}$).

$\square$

<u>Prop.</u>: Sia $\Delta \subseteq \Phi$ base. Allora esiste $\gamma \in E^{reg} \mid \Delta = \Delta(\gamma)$.

<u>Dim.</u>: 1) Esiste $\gamma \in \Phi$ tale che $(\gamma, \alpha) > 0 \;\; \forall \alpha \in \Delta$: esercizio (svolgimento: $\alpha \longmapsto (-, \alpha)$ è un isom. $E \to E^*$, quindi ad es. $\exists \gamma \in E \mid (\gamma, \alpha) = 1 \;\; \forall \alpha \in \Delta$).

2) Un tale γ è regolare perché se avessi $(\gamma, \beta) = 0$ per $\beta \in \Phi$, allora $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$, poss. assumere $c_\alpha \geq 0 \;\; \forall \alpha$, e allora

$$0 = \Big(\gamma, \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha\Big) = \sum_{\alpha \in \Delta} \overbrace{c_\alpha}^{\text{almeno un } c_\alpha \text{ è } > 0} (\gamma, \alpha) > 0 \quad : \text{assurdo.}$$

3) Vale $\Phi^+ \subseteq \Phi^+(\gamma)$, e $\Phi^- \subseteq \Phi^-(\gamma)$, quindi sono due uguaglianze.

4) Ogni $\alpha \in \Delta$ è indecomp. in Φ^+, perché se $\Delta \ni \alpha = \overbrace{\alpha_1 + \alpha_2}^{\text{con } \alpha_i \in \Phi^+}$ allora scriviamo α_1, α_2 come comb. lin. di Δ, e si contraddice il fatto che Δ è una base.

Quindi α è indecomp. in $\Phi^+(\gamma)$, e allora $\Delta \subseteq \Delta(\gamma)$.

Visto che Δ e $\Delta(\gamma)$ sono basi di E, segue $\Delta = \Delta(\gamma)$.

$\square$

Corollario: Se $\alpha, \beta \in \Delta$ sono distinte, allora $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Dim.: Sia $\gamma \in E^{reg}$ tale che $\Delta = \Delta(\gamma)$. Allora $(\alpha, \beta) \leq 0$ è stato già visto nella dim. precedente.

$\square$

Corollario: $\{$camere di Weyl$\}$ è in biiezione con $\{$basi di $\Phi\}$ tramite

$$C \longmapsto \Delta(\gamma) \text{ con } \gamma \in C.$$

Dim.: Se γ e γ' sono nella stessa camera C allora $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ e segue $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Se sono in camere diverse allora $\Phi^+(\gamma) \neq \Phi^+(\gamma')$ e segue $\Delta(\gamma) \neq \Delta(\gamma')$ perché $\Delta(\gamma)$ determina univocam. $\Phi^+(\gamma)$. $\square$

Def.: Fissata una base $\Delta = \Delta(\gamma)$, la camera C tale che $C \ni \gamma$ è detta camera fondamentale.

Gruppo di Weyl

Sia W il sottogruppo di $GL(E)$ (in realtà $O(E)$) generato da s_α per ogni $\alpha \in \Phi$. Fissiamo una base Δ di W.

Oss.: W stabilizza Φ e se $w \in W$ fissa ogni radice allora $w = Id_E$, quindi $W \hookrightarrow S_E$. Segue che W è finito.

Lemma: Sia $\alpha \in \Delta$. Allora $s_\alpha(\beta) > 0 \quad \forall \beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$,

cioè s_α stabilizza $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$.

Dim.: Scriviamo $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$, $\quad c_\gamma \geq 0 \quad \forall \gamma$.

Esiste $\gamma_0 \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ tale che $c_{\gamma_0} \neq 0$ (allora >0) da cui:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha = (c_\alpha - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha)\alpha + \underbrace{c_{\gamma_0}}_{>0} \gamma_0 + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha, \gamma_0\}} c_\gamma \gamma$$

da cui $s_\alpha(\beta) > 0$. $\square$

Corollario: Sia $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0} \beta$. Allora $s_\alpha(\delta) = \delta - \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$.

Dim.: ($s_\alpha(\alpha) = -\alpha$)

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta > 0 \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2}\alpha, \qquad s_\alpha(\delta) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta > 0 \\ \beta \neq \alpha}} \beta - \frac{1}{2}\alpha = \delta - \alpha.$$

(s_α permuta queste radici)

Esercizio: Dim. che $(\delta, \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$ (sugg.: $\Phi^+ \setminus \{\alpha\} = \{\beta \mid (\beta, \alpha) \geq 0\} \cup \{\beta \mid (\beta, \alpha) < 0\}$ scambiati da s_α)

e che δ è regolare.

Teorema: W è generato dalle <u>riflessioni semplici</u>, cioè da s_α con $\alpha \in \Delta$.

Inoltre agisce in modo transitivo sulle basi.

Per la dim.:

Lemma: Data $\beta \in \Phi$, esiste Δ base che contiene β.

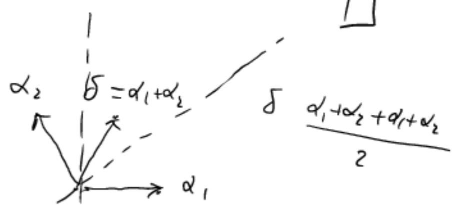
Dim.: Iniziamo con $\gamma_0 \in E$ tale che $(\gamma_0, \beta) = 0$, $(\gamma_0, \alpha) \neq 0$ $\forall \alpha \in \Phi \setminus \{\beta, -\beta\}$.

(Basta osservare che esistono punti di $\beta^\perp$ dove tutti i funzionali $(-, \alpha)|_{\beta^\perp}$ sono $\neq 0$, stessa dim. di $E^{reg} \neq \emptyset$.)

Ora: $(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \beta) = \varepsilon \|\beta\|^2$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \alpha) = (\gamma_0, \alpha) + \varepsilon(\beta, \alpha)$$

Se $\varepsilon > 0$ è abb. piccolo allora $(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \beta)$ è il più piccolo fra i prodotti scalari positivi di $\gamma_0 + \varepsilon\beta$ con le radici. Fissiamo un tale ε: $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon\beta$ è tale che $\beta \in \Delta(\gamma)$ per minimalità. $\square$



Dim. del teorema: Fissiamo una base $\Delta \subseteq \Phi$. Ric. $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$.

Dato $\gamma \in E^{reg}$, cerchiamo σ = prodotto di rifl. semplici tale che $\sigma(\gamma) \in C$ = camera fondament.. Scegliamo σ = un prodotto di rifl. semplici, con $(\delta, \sigma(\gamma))$ massimo, e verifichiamo $\sigma(\gamma) \overset{(?)}{\in} C$. Data $\alpha \in \Delta$ vale

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (s_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), s_\alpha \delta) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

da cui $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$. D'altronde $(\sigma(\gamma), \alpha) = (\gamma, \underbrace{\sigma^{-1}(\alpha)}_{\in \Phi}) \neq 0$, da cui $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta$. Segue: $\sigma(\gamma) \in C$, quindi il sgr di W gen. dalle riflessioni semplici agisce transit. sull'insieme delle basi.

Sia ora $\beta \in \Phi$ e consid. s_β. Per il lemma, esiste

Δ' base tale che $\beta \in \Delta'$, e sia σ prodotto di riflessioni semplici tale che $\sigma(\Delta') = \Delta$, cioè $\sigma(\beta) = \alpha$. Allora vale

$$s_\alpha = \sigma s_\beta \sigma^{-1},$$

perché $\sigma s_\beta \sigma^{-1}$ è una riflessione che manda α in $\sigma(s_\beta(\sigma^{-1}(\alpha))) = \sigma(s_\beta(\beta)) = \sigma(-\beta) = -\alpha$.

(Si può anche fare la verifica: $s_\alpha(\omega) = \omega - \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \alpha$
$\sigma(s_\beta(\sigma^{-1}(\omega))) = \dots = ?$)

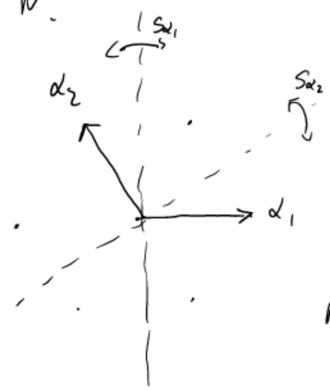
Allora $s_\beta = \sigma^{-1} s_\alpha \sigma$, cioè s_β è prodotto di rifless. semplici.

$\square$

Def.: La <u>lunghezza</u> $\ell(w)$ di $w \in W$ è $\min\{t \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta \mid w = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_t}\}$

Un'espressione $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_t}$ con $t = \ell(w)$ si dice <u>espressione ridotta</u> di w.

<u>Es.</u>:



$W \cong S_3$, rifless. semplici $(1\ 2), (2\ 3)$

$(1\ 2) \mapsto s_{\alpha_1}$, $(2\ 3) \mapsto s_{\alpha_2}$

radici $= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i,j \in \{1,2,3\}\}$

$\sigma \in S_3$ agisce sulle radici come $\sigma(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \varepsilon_{\sigma(i)} - \varepsilon_{\sigma(j)}$

$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ $\qquad s_{\alpha_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (1 \leftrightarrow 2)$

$\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ $\qquad s_{\alpha_1}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (1 \leftrightarrow 2)$

$\ell((1\ 3)) = 3$, $\quad (1\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$

Teorema: $\ell(w) = \left|\{\alpha\in\Phi^+ \mid w(\alpha)<0\}\right| =: n(w)$.

Per la dim.:

rifl. semplici, non nec. distinte, $s_i = s_{\alpha_i}$ con $\alpha_i \in \Delta$

Lemma: Se $w = s_1 \cdots s_t$ e $w(\alpha_t) > 0$ allora esiste $i \in \{1,\dots,t-1\}$ tale che $w = s_1\cdots s_{i-1}s_{i+1}\cdots s_{t-1}$

Dim.: $w(\alpha_t)>0$, $(s_2\cdots s_t)(\alpha_t)\gtrless 0, \dots, s_{t-1}s_t(\alpha_t)\gtrless 0$, $s_t(\alpha_t)<0$

C'è allora un i tale che $s_{i+1}\cdots s_t(\alpha_t)<0$,

$\beta = s_i s_{i+1}\cdots s_t(\alpha_t)>0$, e abb. $s_i(\beta) = s_{i+1}\cdots s_t(\alpha_t)$

Allora β cambia segno con s_i, da cui $\beta = \alpha_i$. Cioè

$\overbrace{s_{i+1}\cdots s_t}^{\sigma}(\alpha_t) = -\alpha_i$, e oss. $s_{\alpha_i} = s_{-\alpha_i}$,

da cui segue $\sigma s_t \sigma^{-1} = s_i$, cioè $s_i = s_{i+1}\cdots s_t\cdot s_t\cdot s_t\cdots s_{i+1} =$

$= s_{i+1}\cdots s_{t-1}s_t s_{t-1}\cdots s_{i+1}$, e allora

$$w = (s_1\cdots s_{i-1})s_i(s_{i+1}\cdots s_t) = (s_1\cdots s_{i-1})(s_{i+1}\cdots \cancel{s_t}\cdots \cancel{s_{i+1}})\cdot$$

$$\cdot(\cancel{s_{i+1}}\cdots\cancel{s_t}) = s_1\cdots s_{i-1}\cdot s_{i+1}\cdots s_{t-1}.$$

$\square$

Corollario: Se $w = s_1\cdots s_t$ è espressione ridotta, allora $w(\alpha_t)<0$.

Dim. teorema: Per induzione su $\ell(w)$. Base dell'induzione:

$$\ell(Id) = 0 = |\{\alpha > 0 \mid Id(\alpha) < 0\}| \quad \text{ok}$$

Passo induttivo. Sia $w = s_1 \cdots s_t$ scrittura ridotta, $t = \ell(w)$, allora $w(\alpha_t) < 0$. Consid. $ws_t = s_1 \cdots s_{t-1}$, abb. $ws_t(\alpha_t) > 0$. Quindi:

1) data $\beta > 0$ con $ws_t(\beta) < 0$ abb. $s_t(\beta) \neq \alpha_t$ e $w(s_t(\beta)) < 0$, viceversa
2) data $\beta > 0$ con $\beta \neq \alpha_t$ e $w(\beta) < 0$ abb. $ws_t(s_t(\beta)) < 0$. Deduciamo che s_t induce una biiezione

$$\{\beta \in \Phi^+ \mid ws_t(\beta) < 0\} \xleftrightarrow[1:1]{s_t} \{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_t\} \mid w(\beta) < 0\}.$$

Visto che $w(\alpha_t) < 0$, segue che ws_t manda in negativa una radice pos. di meno rispetto a w.

Cioè $\quad n(ws_t) = n(w) - 1$. D'altronde

$$\ell(ws_t) = \ell(s_1 \cdots s_{t-1}) \underset{\uparrow}{=} t - 1 = \ell(w) - 1$$

(se scrivessi ws_t con meno di $t-1$ generatori, scriverei w con meno di t generatori)

Per ipotesi induttiva: $n(ws_t) = \ell(ws_t)$, segue $\ell(w) = n(w)$. $\square$

<u>Corollario</u>: W agisce in modo <u>semplicem. transitivo</u> sull'insieme delle basi di Φ.

<u>Dim.</u>: Supp. $w_1(\Delta) = w_2(\Delta)$, allora $w_2^{-1} \circ w_1(\Delta) = \Delta$ cioè

$n(w_2^{-1} \circ w_1) = 0$, allora $\ell(w_2^{-1} \circ w_1) = 0$, cioè $w_2^{-1} \circ w_1 = e$,

$w_2 = w_1$. $\square$

Prop.: Data C camera di Weyl, $\overline{C}$ è dominio fondam. per W, cioè ogni W-orbita di E interseca $\overline{C}$ in un solo punto.

Dim.: Poss. supporre $C =$ camera fondam.. Sia $\lambda \in E$, esiste w tale che $w(\lambda) \in \overline{C}$: esercizio (si prenda $w \mid (w(\lambda), \gamma)$ massimo).

Unicità: siano $w_1, w_2 \in W$ tali che $\underbrace{w_1(\lambda)}_{= \mu_1}, \underbrace{w_2(\lambda)}_{= \mu_2} \in \overline{C}$, cioè

$$\underbrace{w_2 w_1^{-1}}_{= \sigma}(\mu_1) = \mu_2 .$$ Scriviamo $\sigma = s_1 \cdots s_t$ scrittura ridotta, $\sigma(\alpha_t) < 0$.

Ora $$0 \geq (\mu_2, \sigma(\alpha_t)) = (\sigma^{-1}(\mu_2), \alpha_t) = (\mu_1, \alpha_t) \geq 0$$

da cui $(\mu_1, \alpha_t) = 0 = (\mu_2, \sigma(\alpha_t))$.

Allora $$\sigma(\mu_1) = s_1 \cdots \underbrace{s_t(\mu_1)}_{= \mu_1 - \underbrace{\langle \mu_1, \alpha_t^\vee \rangle}_{= 0} \alpha_t} = s_1 \cdots s_{t-1}(\mu_1),$$ quindi

abb. trovato un elem. di lungh. $\ell(\sigma) - 1$ che manda μ_1 in μ_2.
Proseguendo, si arriva a lunghezza $= 0$, cioè $\mu_1 = \mu_2$.

$\square$

Classificazione dei sistemi di radici

<u>Def.:</u> Sia $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base di un sist. di radici Φ, la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle & \\ \langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle & \dots & \\ \dots & & \end{pmatrix} = \left(\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \right)_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$$

è detta <u>matrice di Cartan</u> di Φ. E' indipendente dalla scelta di Δ (a meno di rinumerarne gli elem.) perché W agisce in modo transitivo sull'insieme delle basi.

<u>Oss.:</u> Se α_i e α_j sono ortogonali, $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 0$.

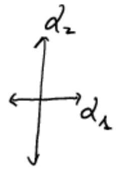
Se $i=j$ allora $\langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 2$, cioè sulla diagonale della matrice le entrate sono uguali a 2.

Se $i \neq j$ e α_i non è ortogonale a α_j:

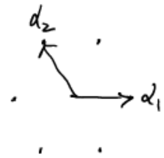
se α_j è lunga quanto α_i o più lunga allora $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$.

se α_i è lunga quanto α_j o più lunga allora $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1, -2,$ opp. -3 (a seconda di $-\frac{\|\alpha_i\|^2}{\|\alpha_j\|^2}$)

Esempi:

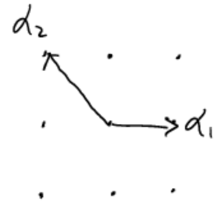


$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$\langle\alpha_1,\alpha_2^\vee\rangle$



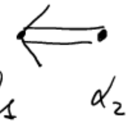
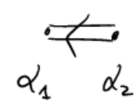
$$\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix}$$

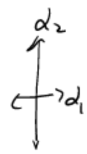
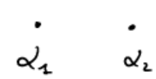
$\langle\alpha_2,\alpha_1^\vee\rangle$

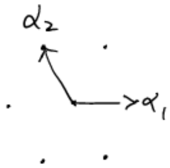
$$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$$

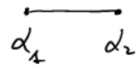
Def.: Il <u>grafo di Coxeter</u> di Φ è il grafo che ha Δ come insieme di vertici, e fra α_i e α_j abb. $\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle\cdot\langle\alpha_j,\alpha_i^\vee\rangle$ lati ($=0,1,2$ opp. 3 lati).

Il <u>diagramma di Dynkin</u> di Φ è ottenuto dal grafo di Coxeter aggiungendo una „freccia" da α_i a α_j se α_i è più lunga di α_j:

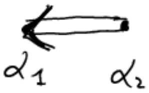
es. $\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow$  (opp. )

Esempi:  diagramma di Dynkin: 



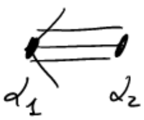


(quadrato)



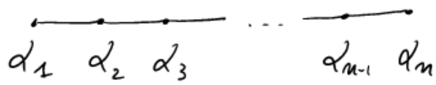
(α_2 è più lunga di α_1)

(due esagoni)



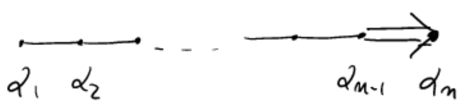
Nome:

$sl(n+1)$:



A_n $(n \geq 1)$

$so(2n+1)$:

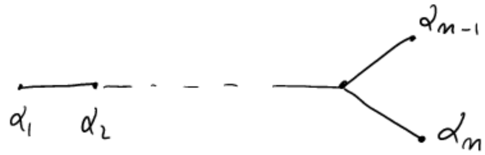


B_n $(n \geq 1)$

$sp(2n)$:

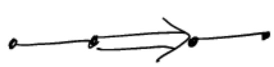
C_n $(n \geq 1)$

$so(2n)$:



D_n $(n \geq 2)$

Altri diagrammi di sistemi di radici:



F_4

G_2 (i due esagoni $= \Phi$)

E_6

E_7

E_8

Casi particolari: $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $D_3 = A_3$, $D_2 =$ due copie sconnesse di A_1.

Vedremo che il diagramma di Dynkin classifica Φ, a meno di isomorfismo, dove questa nozione è data per rispecchiare gli isom. fra alg. di Lie semisemplici.

<u>Def</u>: Siano $\Phi \subseteq E$, $\Phi' \subseteq E'$ sistemi di radici in due spazi euclidei. Φ e Φ' si dicono <u>isomorfi</u> se esiste $f : E \to E'$ isomorfismo lineare (non necess. isometria) tale che $f(\Phi) = \Phi'$, e

$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)^\vee \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi$

(equivalentemente: $\langle -, \beta^\vee \rangle = \langle f(-), f(\beta)^\vee \rangle$ come funzioni su E, $\forall \beta \in \Phi$).

<u>Prop.</u>: Il diagramma di Dynkin determina univocam. Φ a meno di isomorfismi. Cioè se Φ' è un altro sist. di radici, ed esiste una biiezione $f : \Delta \to \Delta'$ dove Δ e Δ' sono basi, e f induce un isomorfismo di diagrammi (cioè i lati e le frecce sono conservati da f), allora f si estende a $f : E \to E'$ che rende Φ e Φ' isomorfi.

<u>Dim.</u>: Il diagramma determina univocam. la matrice di Cartan, quindi f soddisfa $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)^\vee \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta$.

Visto che Δ e Δ' sono basi, f si estende linearmente a isom. lineare $f: E \to E'$. Inoltre:

$$s_{f(\alpha)}(f(\beta)) = \dots = f(s_\alpha(\beta)) \qquad \forall \alpha, \beta \in \Delta$$

Cioè

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle s_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle s_{f(\alpha)}} \\ E & \xrightarrow[f]{} & E' \end{array}$$

commuta: $\quad s_{f(\alpha)} \circ f = f \circ s_\alpha$, cioè $s_{f(\alpha)} = f \circ s_\alpha \circ f^{-1}$.

Allora $w \longmapsto f \circ w \circ f^{-1}$ è un omom. di gruppi $W \to W'$, ovviam. iniettivo, e manda generatori in generatori. Quindi è un isomorfismo.

Data ora $\beta \in \Phi$, prendiamo $w \in W$ tale che $\beta = w(\alpha) \in \Delta$,

allora $f(\beta) = \underbrace{(f \circ w \circ f^{-1})}_{\in W'}(\underbrace{f(\alpha)}_{\in \Delta'}) \in \Phi'$

cioè f manda Φ in Φ'. Deduciamo (da $\beta = w(\alpha)$) anche $s_{f(\beta)} = f \circ s_\beta \circ f^{-1}$,

da cui $\langle -, \beta^\vee \rangle = \langle f(-), f(\beta)^\vee \rangle$.

$\square$

Def: Φ si dice <u>riducibile</u> se $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ (unione disgiunta) con $\Phi_1 \perp \Phi_2$, Φ_i non vuoto.

<u>Oss.</u>: 1) Se $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ è riducibile, allora $E = (\text{Span } \Phi_1) \oplus (\text{Span } \Phi_2)$,

ortogonali

e per un eserc. nei fogli settimanali Φ_i è un sist. di radici in $E_i = \text{Span } \Phi_i$.

2) Φ riducibile è equivalente a richiedere $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ dove Δ = base di Φ, Δ_1, Δ_2 sottoinsiemi non vuoti e $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Infatti se $\Delta_1 \perp \Delta_2$ allora le riflessioni semplici di Δ_1 fissano ogni elem. di Δ_2, e viceversa. Segue che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ dove Φ_i = radici ottenute applicando sequenze di rifless. semplici di Δ_i a vettori di Δ_i.

3) Da 2) segue: Φ è irriducibile $\iff$ il diagr. di Dynkin è <u>connesso</u>.

In generale Φ si decompone in modo unico come unione disgiunta di sottoinsiemi non vuoti $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_l$

dove $\Phi_i \perp \Phi_j$ $\forall i \neq j$, e Φ_i irriducibile $\forall i$ (chiaro perché il diagr. di Dynkin è unione disgiunta delle sue comp. connesse).

Ora quindi classificheremo i diagrammi connessi, che corrisp. ai sistemi di radici irriducibili.

Teorema: La lista $\underset{n\geq 1}{A_n}, \underset{n\geq 2}{B_n}, \underset{n\geq 3}{C_n}, \underset{n\geq 4}{D_n}, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ è la lista completa e non ridondante dei diagrammi di Dynkin connessi.

Dim: Dimostriamo che un diagramma di Dynkin connesso è in questa lista.
Che tutti i diagrammi in lista corrispondano a sistemi di radici lo verificheremo negli esercizi.

Sia allora $\Delta = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ base di Φ. Normalizziamoli:

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}.$$

Allora:
1) $\varepsilon_1, .., \varepsilon_n$ sono lin. indip., di lunghezza 1
2) $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ $\forall i \neq j$
3) $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\forall i \neq j$

Chiameremo ammissibile una famiglia di vettori con le propr. 1), 2), 3), e da essa si costruisce il grafo di Coxeter come per Δ. Un grafo del genere si dirà ammissibile.

<u>Passo 1</u>: Nel grafo di Coxeter (di una fam. ammissibile con n elem.) ci sono al più $n-1$ coppie di punti collegati.

<u>Dim.</u>: Sia $v = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, allora $\quad 0 < \|v\|^2 = n + \underline{\sum_{i<j} 2\cdot(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}$

Segue $\underbrace{\sum_{i<j} 2|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)|}_{} < n$.

Inoltre: $\quad 4|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)|^2 \in \{0,1,2,3\}$ se $i \neq j$

da cui $\quad |(\varepsilon_i, \varepsilon_j)| \begin{cases} = 0 & \text{opp.} \\ \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Segue $\quad \left|\{(i,j) \mid i<j \text{ e } \underset{\uparrow \atop \text{cioè vertici collegati}}{(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0}\}\right| \leq \sum_{i<j} 2|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)| < n$

$\square$ (Passo 1)

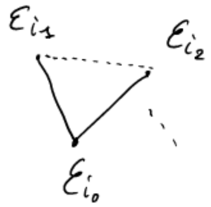
<u>Passo 2</u>: Nel grafo di Coxeter non ci sono circuiti (es. )

<u>Dim.</u>: Un sottoinsieme di una fam. ammissibile è ammissibile, e se avessimo un circuito che coinvolge m vertici, formerebbero una fam. ammissibile di m elem. e m coppie collegate: assurdo per passo 1.

$\square$ (Passo 2)

<u>Passo 3</u>: Da ogni vertice partono al più 3 lati.

<u>Dim.</u>: Sia ε_{i_0} un elem. della famiglia, consid. $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_m}$ i vertici collegati a ε_{i_0} (sono quelli non ortogonali a ε_{i_0}).



Vale: ε_{i_j} e ε_{i_ℓ} sono ortogonali se $\ell \neq j$, altrimenti formerebbero un circuito con ε_{i_0}.

Consid. $(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_m}, \varepsilon_{i_0})$, ortonormalizziamo questi vettori col procedim. di Gram-Schmidt, otteniamo $(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_m}, \eta)$. Visto che otteniamo una base ortonormale di un sottosp. che contiene ε_{i_0}, abb.:

$$\varepsilon_{i_0} = (\varepsilon_{i_0}, \eta)\cdot\eta + \sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})\varepsilon_{i_j}$$

Calcoliamo $1 = (\varepsilon_{i_0}, \varepsilon_{i_0}) = \underbrace{(\varepsilon_{i_0}, \eta)^2}_{\neq 0} + \sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2$

perché ε_{i_0} non è comb. lin. di $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_m}$

allora $\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2 < 1$.

Segue $\sum_{j=1}^{m} 4(\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2 < 4$ ed è un intero, quindi ≤ 3.

Inoltre $\sum_{j=1}^{m} 4(\varepsilon_{i_j}, \varepsilon_{i_0})^2$ è il numero totale di vertici che escono da ε_{i_0}.

In particolare, se c'è un „lato triplo": $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$ allora il diagramma ha solo questi due vertici e questi tre lati: otteniamo

G_2 $\Lleftarrow$

Possiamo assumere d'ora in poi: il diagramma di partenza ha solo lati semplici o doppi.

<u>Passo 4</u>: Supponiamo di avere un sottografo del tipo

di tipo A_m, cioè una sequenza di vertici $\varepsilon_{i_1},\dots,\varepsilon_{i_m}$ in cui gli unici lati sono semplici e fra ε_{i_j} e $\varepsilon_{i_{j+1}}$.

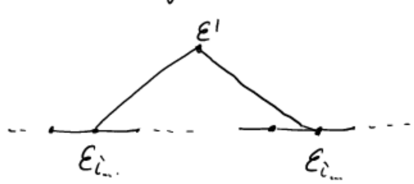
Consid. $\varepsilon_0=\varepsilon_{i_1}+\dots+\varepsilon_{i_m}$, allora la famiglia ottenuta cancellando $\varepsilon_{i_1},\dots,\varepsilon_{i_m}$ e rimpiazzandoli col solo ε_0 è ammissibile.

<u>Dim.</u>: Calcoliamo $(\varepsilon_0,\varepsilon_0)=m+\sum_{l<j}2(\varepsilon_{i_l},\varepsilon_{i_j})$

inoltre $(\varepsilon_{i_l},\varepsilon_{i_j})=0$ se $l\neq j-1$, e $(\varepsilon_{i_{j-1}},\varepsilon_{i_j})=\frac{-1}{2}$

quindi $(\varepsilon_0,\varepsilon_0)=m+(-m+1)=1$.

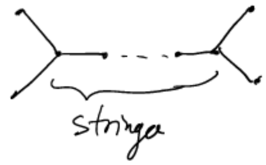
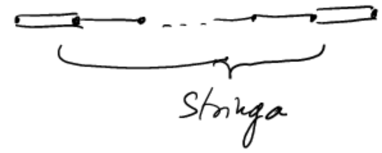
Sia infine ε' = vertice $\notin\{\varepsilon_{i_1},\dots,\varepsilon_{i_m}\}$. Oss.:



è impossibile perché non abbiamo circuiti, quindi ε' è collegato al massimo a <u>un</u> vertice in $\{\varepsilon_{i_1},\dots,\varepsilon_{i_m}\}$, mettiamo ε_{i_j}, e allora:

$$4(\varepsilon',\varepsilon_0)^2=\begin{cases}4(\varepsilon',\varepsilon_{i_j})^2 & \text{se } \varepsilon_{i_j} \text{ esiste}\\ 0 & \text{se } \varepsilon' \text{ non è collegato ad alcun vertice in } \{\varepsilon_{i_1},\dots,\varepsilon_{i_m}\}.\end{cases}$$

Segue che ad ogni „stringa" non sono collegati più di 3 lati

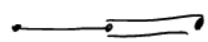
ad es.  e 

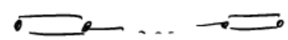
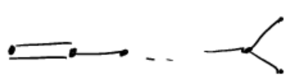
sono impossibili

Passo 5) (fine della dim.) Se il diagramma è connesso e non ci sono vertici trivalenti (cioè da cui escono 3 lati), il diagramma è A_n.

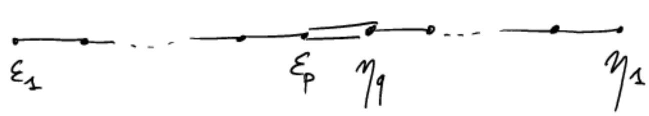
Supp. esista un vertice trivalente.

a) Supp. il vertice trivalente sia del tipo:



Il grafo continua da tutte e due le parti, ma senza altri vertici trivalenti, altrimenti avrei  già escluso, opp. , escluso per lo stesso motivo di prima.

Quindi abb.:



Qui usiamo: $\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i \,,\; \eta = \sum_{j=1}^{q} j\eta_j \,.$

Allora $(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta)$ (Cauchy-Schwarz per vettori lin. indip.)

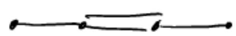
Inoltre $(\varepsilon,\eta)^2 = p^2 q^2 (\varepsilon_p, \eta_q)^2 = \dfrac{p^2q^2}{2}$, e abb.:

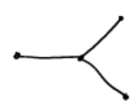
$$(\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} 2(i+1)i\,(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) =$$

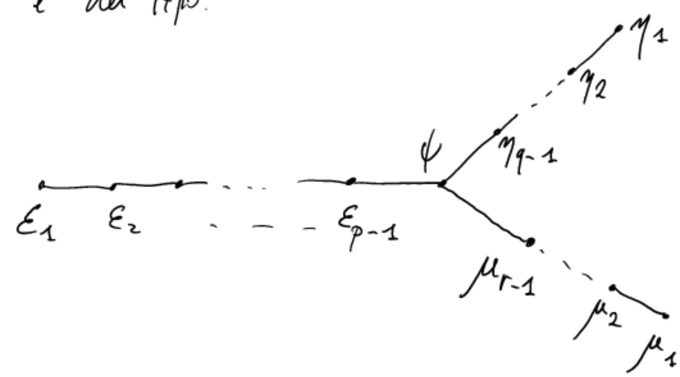
$$= \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} (i+1)i = \ldots = \frac{p(p+1)}{2}$$

analogam. $(\eta,\eta) = \dfrac{q(q+1)}{2}$

Concludiamo: $\dfrac{p^2q^2}{2} < \dfrac{p(p+1)}{2} \cdot \dfrac{q(q+1)}{2}$, da cui $(p-1)(q-1) < 2$

Allora se $p=1$ opp. $q=1$, l'altro è libero e otteniamo B_n opp. C_n. Se $p>1$, $q>1$ allora $p=q=2$ e il grafo è , quindi F_4.

b) Supp. il vertice trivalente sia del tipo , il diagramma allora è del tipo:



$p>1$, $q>1$, $r>1$.

Definiamo $\varepsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\varepsilon_i$, $\eta = \sum_{i=1}^{q-1} i\eta_i$, $\mu = \sum_{i=1}^{r-1} i\mu_i$.

Consid. $c_\varepsilon = \dfrac{(\varepsilon, \psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)(\psi,\psi)}$ $\qquad c_\mu = \dfrac{(\mu, \psi)^2}{(\mu,\mu)(\psi,\psi)}$ $\qquad$ (ric. $(\psi,\psi) = 1$)

$c_\eta = \dfrac{(\eta, \psi)^2}{(\eta,\eta)(\psi,\psi)}$

(c_ε = quadrato del coseno dell'angolo formato da ε e ψ)

Ortonormalizziamo $(\varepsilon, \eta, \mu, \psi)$, otteniamo $c_\varepsilon + c_\eta + c_\mu < 1$

(come nel passo 3)). Cioè $\dfrac{4(\varepsilon,\psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)} + \dfrac{4(\eta,\psi)^2}{(\eta,\eta)} + \dfrac{4(\mu,\psi)^2}{(\mu,\mu)} < 4.$

Inoltre $(\varepsilon,\varepsilon) = \dots = \dfrac{p(p-1)}{2}$, $\quad (\eta,\eta) = \dfrac{q(q-1)}{2}$, $\quad (\mu,\mu) = \dfrac{r(r-1)}{2}$

e $(\varepsilon, \psi) = (p-1)(\varepsilon_{p-1}, \psi)$ quindi $4(\varepsilon,\psi)^2 = (p-1)^2 \underbrace{4(\varepsilon_{p-1}, \psi)^2}_{=1} = (p-1)^2$

Concludiamo
$$\frac{(p-1)^2}{\frac{p(p-1)}{2}} + \frac{(q-1)^2}{\frac{q(q-1)}{2}} + \frac{(r-1)^2}{\frac{r(r-1)}{2}} < 4$$

allora $\dfrac{p-1}{p} + \dfrac{q-1}{q} + \dfrac{r-1}{r} < 2$

da cui $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} > 1$. Possiamo assumere $p \geq q \geq r$,

e in questo caso $1 < \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} \leq \dfrac{3}{r}$. Segue $2 \leq r < 3$

cioè $r = 2$ e concludiamo che il „ramo" più corto è lungo 1.

Segue anche $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{q}$, da cui $q=2$ opp 3.

Se $q=2$ allora p può essere qualsiasi, otteniamo D_n.

Se $q=3$ segue $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$, $p<6$, da cui:

$p=3 \rightsquigarrow E_6$

$p=4 \rightsquigarrow E_7$

$p=5 \rightsquigarrow E_8$

$\square$

Classificazione delle algebre di Lie semisemplici

Vedremo il teorema seguente:

Teorema: Sia Φ sistema di radici. Esiste L algebra di Lie semisemplice e $H \subseteq L$ sottoalgebra torale massimale con sist. di radici associato Φ, e L è unica a meno di isomorfismi.

Per completare la classificazione bisognerebbe dim. anche che Φ è indipendente dalla scelta di H in L. Questo non lo vedremo.

Per la dim. del teorema definiremo L per generatori e relazioni.

Studiamo allora algebre di Lie definite per generatori e relazioni. Si parte da un'algebra libera associativa.

Sia V spazio vettoriale, definiamo l'algebra tensoriale

$$T(V) = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots =$$

$$= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{V^{\otimes n}}_{\substack{\parallel \\ \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ volte}}}}$$

E' un'algebra associativa unitaria, col prodotto $T(V) \times T(V) \to T(V)$ definito da $(a_1 \otimes \dots \otimes a_s) \cdot (b_1 \otimes \dots \otimes b_r) = a_1 \otimes \dots \otimes a_s \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_r$ (estesa multilinearmente a tutta $T(V)$).

Per quest'algebra vale una proprietà universale:

sia $(v_1, \dots, v_d)$ una base di V, sia A una k-algebra associativa unitaria, siano $w_1, \dots, w_d \in A$, allora esiste un unico omomorfismo di k-algebre unitarie $T(V) \xrightarrow{\varphi} A$ tale che $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i$.

Inoltre $T(V)$ è un'algebra di Lie come al solito, ponendo $[a, b] = a \otimes b - b \otimes a$.

Def: L'algebra di Lie libera in generatori $x_1, \dots, x_n$ è definita come segue:

si considera uno spazio vettoriale V con base $x_1, \dots, x_n$, si definisce $\underline{\underline{L(x_1,..,x_m)}}$ = più piccola sottoalgebra di Lie di $T(V)$ contenente $x_1,..,x_m$.

Vale la seguente proprietà universale:

<u>Prop.</u>: Sia L algebra di Lie <u>contenuta in un'algebra associativa unitaria A</u> (in modo che L sia una sottoalgebra di Lie di A). Siano $y_1,..,y_m \in L$ arbitrari. Allora esiste un unico omomorfismo di algebre di Lie $\varphi : L(x_1,..,x_m) \to L$ tale che $\varphi(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1,..,m\}$.

<u>Dim.</u>: Usiamo $\psi : T(V) \to A$ tale che $\psi(x_i) = y_i$, è un omom. di algebre associative unitarie, quindi anche un omom. di algebre di Lie.
Ora $L(x_1,..,x_m)$ è ottenuta da $x_1,..,x_m$ facendo bracket e comb. lineari ripetuti a piacere (perché quello che si ottiene in questo modo è in $L(x_1,..,x_m)$, ed è una sottoalgebra di Lie di $T(V)$, quindi deve coincidere con $L(x_1,..,x_m)$ per minimalità).
Segue che $\psi(L(x_1,..,x_m)) \subseteq L$, poniamo $\varphi = \psi|_{L(x_1,..,x_m)} : L(x_1,..,x_m) \to L$.
L'unicità di φ è chiara. $\square$

<u>Def</u>: Siano $R_1,..,R_m \in L(x_1,..,x_m)$, e consid. I = ideale generato da $R_1,..,R_m$ in $L(x_1,..,x_m)$, cioè il più piccolo ideale che li contiene.

Allora $\frac{L(x_1,..,x_n)}{I}$ è detta algebra di Lie definita per generatori (gli $x_1,..,x_n$) e relazioni (gli $R_1,..,R_m$).

<u>Proposizione</u>: Sia L algebra di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalg. torale massimale, Φ sistema di radici. Scegliamo $\Delta \subseteq \Phi$ base, $\Delta = \{\alpha_1,..,\alpha_\ell\}$ poniamo $h_i = h_{\alpha_i}$, scegliamo $x_i \in L_{\alpha_i}$, $y_i \in L_{-\alpha_i}$ tali che $[x_i, y_i] = h_i$. Allora:

$(S1)$ $[h_i, h_j] = 0 \qquad \forall i,j$

$(S2)$ $[x_i, y_i] = h_i, \quad [x_i, y_j] = 0 \qquad \forall i \neq j$

$(S3)$ $[h_i, x_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle x_j, \quad [h_i, y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle y_j \qquad \forall i,j$

(S_{ij}^+) $(ad(x_i))^{-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(x_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

(S_{ij}^-) $(ad(y_i))^{-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(y_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

<u>Dim.</u>: $(S1)$ chiaro, H è abeliana

$(S2)$: $[x_i, y_i] = h_i$ è la def., $[x_i, y_j] \in L_{(\alpha_i - \alpha_j)}$

non è una radice, per le propr. della base Δ

quindi $L_{\alpha_i - \alpha_j} = \{0\}$, e $[x_i, y_j] = 0$.

(S3) Vale ricordando $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = \dfrac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \alpha_j(h_i)$
$\left(h_i = \dfrac{2 t_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)$.

(S_{ij}^+) Consid. $ad(x_i)$: $\quad L_{\alpha_j} \xrightarrow{ad(x_i)} L_{\alpha_j+\alpha_i} \xrightarrow{ad(x_i)} L_{\alpha_j+2\alpha_i} \longrightarrow \dots$

Le radici coinvolte sono la α_i-stringa di α_j. Inoltre $\alpha_j - \alpha_i$ non è una radice, quindi la stringa è:

$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \dots, \alpha_j + q\alpha_i$

e ricordiamo $\underset{0}{\overset{\shortparallel}{r}} - q = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$, cioè $q = -\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$.

Quindi l'ultima radice si ottiene applicando $ad(x_i)$ a x_j un numero di volte pari a $-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$, la relazione segue.

(S_{ij}^-): analogo a (S_{ij}^+). $\square$

<u>Teorema</u> (Serre): Sia Φ sistema di radici, Δ = base di Φ.
Sia L algebra di Lie def. per generatori e relazioni:

generatori $\quad x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell \qquad (\ell = |\Delta|)$
relazioni: $\quad (S1), (S2), (S3), (S_{ij}^+), (S_{ij}^-) \quad (\forall i \neq j)$

Allora L ha dimensione finita, è semisemplice, $H = \mathrm{Span}\{h_1, \dots, h_\ell\}$

è una sottoalgebra torale massimale, e il sistema di radici corrispondente è isomorfo a Φ.

Per la dimostrazione:

$$\hat{L} = L(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_\ell, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\ell)$$ (algebra di Lie libera)

$\hat{K}$ = ideale generato dalle relaz. (S1), (S2), (S3) „applicate" agli elem. $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_\ell, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\ell$, e def.

$$L_0 = \frac{\hat{L}}{\hat{K}}$$

Poniamo (per abuso di notazione)

$$x_i = \hat{x}_i + \hat{K}$$
$$h_i = \hat{h}_i + \hat{K}$$
$$y_i = \hat{y}_i + \hat{K}$$

(i veri elem. x_i, h_i, y_i saranno nel quoz. di $\hat{L}$ per l'ideale generato da tutte le relazioni).

Per studiare L_0, studieremo prima di tutto una rappresentazione di $\hat{L}$ (che passa al quoziente). La definizione invita la costruzione dei moduli di Verma.

Partiamo da uno spazio vettoriale W con base $(v_1, \dots, v_\ell)$, considero

$V = T(W)$ e definisco una rappresentazione di $\hat{L}$ su V:

$\hat{\varphi} : \hat{L} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$:

$$\begin{cases} \hat{h}_j . 1 = 0 \\ \hat{h}_j . (v_{i_1} \dots v_{i_t}) = -\left(c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j}\right) v_{i_1} \dots v_{i_t} \end{cases}$$

(notazione: $v_{i_1} \dots v_{i_t} =$
$= v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_t}$)

$(\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = c_{ij})$

$$\begin{cases} \hat{y}_j . 1 = v_j \\ \hat{y}_j . (v_{i_1} \dots v_{i_t}) = v_j \, v_{i_1} \dots v_{i_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_j . 1 = 0 = \hat{x}_j . v_i \\ \hat{x}_j . (v_{i_1} \dots v_{i_t}) = v_{i_1} \cdot \left(\hat{x}_j . v_{i_2} \dots v_{i_t}\right) - \delta_{i_1 j}\left(c_{i_2 j} + \dots + c_{i_t,j}\right) v_{i_2} \dots v_{i_t} \end{cases}$$

(definisce l'azione di $\hat{x}_j$ ricorsivamente).

Abb. definito $\hat{\varphi}$ scegliendo gli endomorfismi $\hat{\varphi}(\hat{x}_i)$, $\hat{\varphi}(h_i)$, $\hat{\varphi}(y_i)$, questo definisce un omom. di algebre associative

$$T\left(k\hat{x}_1 \oplus \dots \oplus k\hat{y}_\ell\right) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

per la proprietà universale dell'algebra tensoriale. Questo omom. si restringe a un omom. di algebre di Lie $\hat{L} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathfrak{gl}(V)$.

<u>Proposizione:</u> La rappr. $\hat{\varphi} : \hat{L} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ passa al quoziente

$$\varphi : L_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Dim.: Oss. che $\hat{h}_i$ agisce diagonalmente sulla base „solita" di $V = T(W)$

cioè la base data dai vettori $v_{i_1} \cdots v_{i_t}$ con $i_1, \ldots, i_t \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Quindi $\hat{\varphi}(h_i)$ e $\hat{\varphi}(h_j)$ commutano $\forall i, j$, cioè vale (S1).

Calcoliamo $[\hat{\varphi}(x_i), \underbrace{\hat{\varphi}(y_j)}]$ sui vettori di questa base:

($\hat{y}$ è fare il prodotto tensoriale a sinistra con v_j)

$$\hat{x}_i \underbrace{\hat{y}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}}_{v_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}} - \hat{y}_j \hat{x}_i v_{i_1} \cdots v_{i_t} = \cancel{v_j (\hat{x}_i \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t})} - \delta_{j,i} (c_{i_1, i} + \ldots + c_{i_t, i}) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} - \cancel{v_j \cdot (\hat{x}_i \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t})} =$$

$$= \delta_{ji} \, \hat{h}_i \, v_{i_1} \cdots v_{i_t}$$

vale per $t \geq 1$ (cioè se ho vettori $v_{i_1} \cdots v_{i_t}$), inoltre

$$(\hat{x}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \underbrace{\hat{x}_i). 1} = \underbrace{\hat{x}_i \, \hat{v}_j}_{0} - 0 = 0 = \hat{h}_i . 1$$

Cioè vale (S2).

Vediamo (S3) per le y:

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i). 1 = \hat{h}_i \, v_j = -c_{ji} v_j = (-c_{ji} \hat{y}_j). 1$$

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i) . \underbrace{v_{i_1} \cdots v_{i_t}} = \ldots = -c_{ji} \, v_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = (-c_{ji} y_j) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$$

quindi (S3) per le y vale.

Vediamo (S3) per le x:

usiamo un'osservazione: $\hat{h}_i \, \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = -\left(c_{i_1,i} + \dots + c_{i_t,i} - c_{ji}\right) \hat{x}_j \cdot$

$\cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$

dim.: esercizio, per induzione su t

Da questo segue:

$$\left(\underbrace{\hat{h}_i \, \hat{x}_j}_{} - \hat{x}_j \, \hat{h}_i\right) . 1 = 0$$

$$(\text{— , ——}) . v_{i_1} \cdots v_{i_t} = \left(-\left(c_{i_1,i} + \dots + c_{i_t,i} - c_{ji}\right) + \left(c_{i_1,i} + \dots + c_{i_t,i}\right)\right)$$

$$\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = c_{ji} \, \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$$

cioè vale (S3) per le x.

$\square$

Teorema: 1) $(h_1, \dots, h_\ell)$ è una base di una sottoalgebra abeliana H di L_0.

2) $L_0 = Y \oplus H \oplus X$ (somma diretta come sottosp. vettoriali; non nec. come algebre di Lie)

dove Y = sottoalg. di Lie gen. da $y_1, \dots, y_\ell$
X = — , ———— $x_1, \dots, x_\ell$

Dim.: 1) Dimostriamo che $\operatorname{Span}\{\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_\ell\} \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$.

Infatti se $\hat{\varphi}\left(\sum a_j \hat{h}_j\right) = 0$ allora applicato a v_i

implica $-\sum_j a_j c_{ij} = 0 \quad \forall i$.

Ora, la matrice di Cartan è invertibile anche per un sistema di radici astratto (stessa dim. vista per il sistema di radici di un'alg. di Lie semisemplice), quindi $a_1 = \dots = a_\ell = 0$, e allora

$\mathrm{Span}\{h_1, .., h_\ell\} \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$

Segue: lo sp. vett. gen. dagli $\hat{h}_i$ va isomorficamente in $gl(V)$ e allora anche in L_0, cioè vale 1).

2) Dimostriamo che $\mathrm{Span}\{x_1, .., x_\ell, h_1, .., h_\ell, y_1, .., y_\ell\} \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$.

Definiamo $S_j = \mathrm{Span}\{x_j, h_j, y_j\}$, e ricordiamo che in S_j valgono le stesse relaz. di $sl(2)$ con (x_j, h_j, y_j) al posto di (e, h, f). Allora S_j è un quoziente di $sl(2)$, da cui $S_j \cong sl(2)$ opp. $S_j = \{0\}$.
Nel secondo caso avrei $h_j = 0$, ma questo è falso perché $h_1, .., h_\ell$ sono non nulli per la parte 1). Quindi $S_j \cong sl(2)$, e allora $x_1, .., x_\ell, y_1, .., y_\ell$ sono tutti non nulli $(\in L_0)$.

Concludiamo che $x_1, .., x_\ell, h_1, .., h_\ell, y_1, .., y_\ell$ sono linearmente indipendenti: esercizio (si usa che $x_1, .., x_\ell, y_1, .., y_\ell$ sono $ad(H)$-autovettori, e i loro autovalori, che sono elementi di H^*, sono tutti distinti; e si usa anche che $h_1, .., h_\ell$ sono $ad(H)$-autovettori di autovalore nullo, diverso dagli autovalori degli x_i e y_i, e $h_1, .., h_\ell$ sono lin. indipendenti).

Per dimostrare 2) osserviamo l'identità seguente:

$$\Big[h_j, \underbrace{[X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{t-1}}, X_{i_t}]\ldots]}_{\substack{\uparrow \\ \text{elem. di } X}}\Big] = \left(c_{i_1,j} + \ldots + c_{i_t,j}\right) \cdot [X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{t-1}}, X_{i_t}]\ldots]$$

dimostrazione: esercizio (induzione su t, per $t=1$ è (S3)).

Analogamente per le Y, con il coeff. $-(c_{i_1,j} + \ldots + c_{i_t,j})$.

Inoltre osserviamo anche:

$$[Y_j, [X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots [X_{i_{t-1}}, X_{i_t}]\ldots]] \in X \qquad \text{se } t \geq 2$$

dimostrazione: esercizio (per $t=2$ è (S2)+(S3) e Jacobi, in generale si fa induzione su t).

Analogamente con „X" e „Y" scambiate.

Da queste osservazioni deduciamo: 1) $Y + H + X$ è una sottoalgebra di Lie, e allora $L_0 = Y + H + X$;

2) La somma è diretta, cioè $L_0 = Y \oplus H \oplus X$. Infatti la prima osservazione fornisce una decomposizione di L_0 in autospazi per $ad(H)$, gli $ad(H)$-autovalori degli autovettori in X sono del tipo

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i \qquad \text{con } c_i \geq 0 \text{ interi}$$

e gli $ad(H)$-autovalori degli autovettori in Y sono del tipo

$$\sum_{i=1}^{\ell} -d_i \alpha_i \qquad \text{con } d_i \geq 0 \text{ interi}$$

Infatti $\quad c_{i_1,j} + \ldots + c_{i_t,j} = \langle \alpha_{i_1}, \alpha_j^\vee \rangle + \ldots + \langle \alpha_{i_t}, \alpha_j^\vee \rangle =$

$$= \alpha_{i_1}(h_j) + \ldots + \alpha_{i_t}(h_j) = (\underbrace{\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_t}})(h_j)$$

A questo punto la somma è diretta per l'esercizio di prima. $\square$

<u>Notazione:</u> Definiamo i seguenti elem. di L_0:

$$X_{ij} = ad(X_i)^{-c_{ji}+1}(X_j)$$

$$Y_{ij} = ad(Y_i)^{-c_{ji}+1}(Y_j) \qquad \text{(per } i \neq j)$$

<u>Lemma:</u> In L_0 vale: $\quad ad(X_s)(Y_{ij}) = 0 \quad \forall s \in \{1, \ldots, l\}$ e $\forall i \neq j$.

e $\quad ad(Y_s)(X_{ij}) = 0$.

<u>Dim.:</u> Supponiamo $s \neq i$, allora $[X_s, Y_i] = 0$, e allora $ad(X_s), ad(Y_i)$ commutano. Quindi

$$ad(X_s)\, ad(Y_i)^{(\ldots)}(Y_j) = ad(Y_i)^{-c_{ji}+1} ad(X_s)(Y_j) = \begin{cases} ad(Y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j) & \text{se } s = j \\ 0 & \text{se } s \neq j \end{cases}$$

Sappiamo: $ad(Y_i)(h_j) = c_{ij} Y_i$. Se $c_{ij} = 0$ allora abb. finito, altrimenti $c_{ij} \neq 0$, e allora $c_{ij} < 0$ (perché $i \neq j$) e allora $-c_{ji} + 1 \geq 2$. In questo caso stiamo calcolando

$$\underbrace{[Y_i, [Y_i, \ldots, [Y_i, c_{ij} Y_i] \cdots]}_{Y_i \text{ compare almeno 2 volte}} = 0$$